



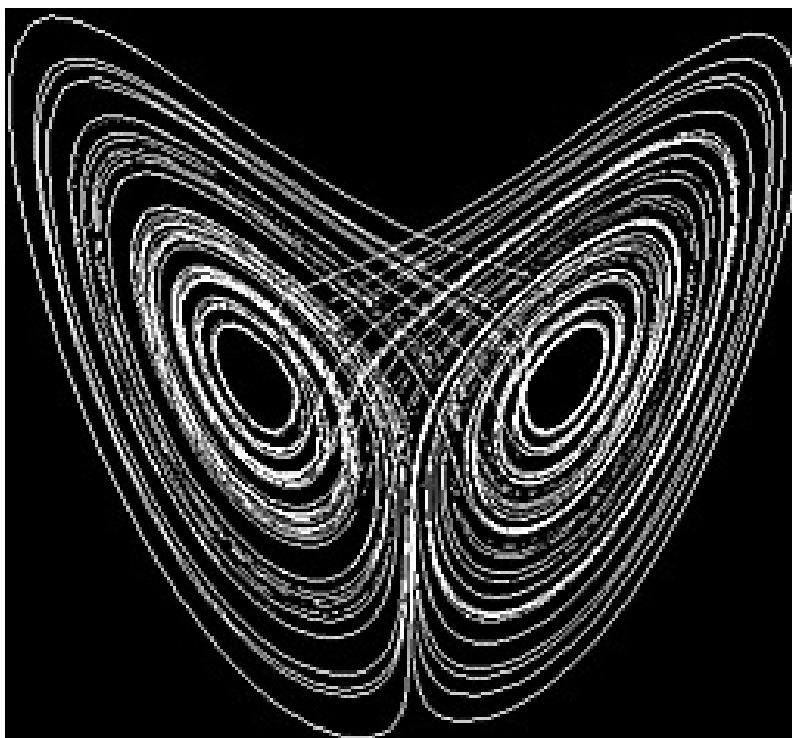
ensiate

→ La planète fait école ←

Prépas | Cycle Ingénierie | Master

Prépas | Cycle Ingénierie | Master

La Théorie du Chaos



Année 2015 - 2016

COURTOIS Thomas

Au début du XXème siècle, les théories de Newton sur les systèmes mécaniques démontraient qu'ils étaient dirigés par des lois simples et déterministes. Mais cette idée de déterminisme allait bientôt être remise en question par certains scientifiques à l'aide d'une invention cruciale : l'ordinateur.

La théorie du Chaos naît donc de l'impossibilité de faire une prédiction sur le long terme d'un système soumis à des lois déterministes pourtant connues.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	7
Un peu d'histoire	9
La brève histoire de l'évolution des sciences	9
La théorie du Chaos : une redéfinition des sciences	11
La géométrie de la nature	13
Approche de la théorie du Chaos	17
Le phénomène de conduction thermique	17
Démonstration de l'équation de la température	17
Les limites de la mécanique classique	20
Les apports de la théorie du Chaos	21
Discussion	22
Le Chaos en convection thermique	25
Un peu de météorologie	25
L'expérience de Rayleigh-Bénard	28
Analyse du système de Lorenz	29
Le problème des N corps	35
La théorie de la gravitation	35
Problème à N-corps	37
La géométrie de la nature	39
Une organisation chaotique	39
La figure de la résolution polynomiale	42
Dimension fractale et jeux du Chaos	46
Conclusion	49
Annexe	51
Développement de l'équation différentielle de la transmission de chaleur par conduction . . .	51
Discrétisation de la transmission de chaleur par conduction	52
Equations de Lorenz	53
Méthode de Runge-Kutta	56
Bibliographie	57

Remerciements

Dans un premier temps, je voudrais remercier Mr Limat Laurent, directeur du laboratoire Matière et Systèmes complexes à l'université Paris Diderot et Mr Courbage Maurice qui ont répondu à mes questions lorsque j'étais dans une impasse.

Je remercie également les professeurs de l'ENSIATE qui ont été présents lorsque j'avais des difficultés et qui m'ont apporté des éléments de réponses.

Enfin, je remercie ma mère Courtois Martine, ancien professeur des écoles qui a relu ce mémoire et m'a apporté une vision extérieure pour pouvoir améliorer la compréhension de ce document.

Introduction

Apparue dans les années soixante, la théorie du chaos est née de la nécessité de se représenter des phénomènes physiques nécessitant l'application de calculs aux différentielles très complexes. Bien qu'elle fût critiquée lors de sa création, elle finit par connaître un véritable succès médiatique. Certaines personnes parlent même de cette découverte comme une révolution scientifique d'une importance identique aux grandes découvertes telles que la mécanique de Newton, la relativité d'Einstein ou la mécanique quantique. Cependant, certaines personnes parlent beaucoup de cette théorie sans en avoir pour autant une véritable connaissance.

James Clerk Maxwell a observé pour la première fois la nature chaotique de la vie. Il a commencé par l'observation suivante : *“When an infinitely small variation in the present state may bring about a finite difference in the state of the system in a finite time, the condition of the system is said to be unstable”* (Quand une variation infime dans l'état présent mène à une variation tangible dans le système dans une limite de temps défini, le système est défini comme instable). En d'autres mots, toutes vos actions, aussi insignifiantes soient-elles (comme demander votre chemin dans la rue ou encore chanter sous la douche) auront des répercussions sur votre vie, la vie des autres et l'avenir de la race humaine. La théorie du Chaos a donc remis en cause l'idée de “destinée”, nos vies ne sont rien sinon le résultat de changements totalement incontrôlables. L'exemple le plus parlant pour parler de cette théorie est l'effet papillon. Selon cet effet, un seul battement d'aile de papillon pourrait mener à la formation d'un ouragan. Cette idée a fait griller quelques neurones car soudainement, tout semblait s'effondrer. Dorénavant, le désordre devient incontrôlable et les certitudes deviennent des probabilités. Il a fallu du temps pour que les scientifiques commencent à utiliser cette nouvelle visualisation des systèmes physiques.

Grâce à cette découverte, de nombreux domaines ont été transformés. Les biologistes ont vu dans cette théorie la possibilité de créer des schémas d'organisation du vivant, les économistes ont commencé à mieux comprendre les variations du marché et ont arrêté de se faire surprendre, ou en tout cas, ils ont limité les surprises. Dans le domaine de la météorologie, les prévisions ont gagné en précisions et la réputation de la discipline s'est trouvée largement améliorée. De même, certains objets du quotidien ont également profité des enseignements du Chaos (comme des machines à laver avec des mécanismes à pulsations aléatoires qui assurent un dégrassage plus efficace).

Dans ce nouveau monde, la vie est devenue un jeu de hasard. Chaque décision que vous prenez peut vous emmener sur un chemin qu'aucune personne n'aurait pensé et que personne d'autre ne pourrait prendre. Mais cette idée fait difficilement son chemin dans les esprits. Le fait qu'il y ait de l'ordre dans le monde avait quelque chose de rassurant pour certains, ici nous pouvons alors penser que l'expérience de l'univers a explosé dans le nez d'un dieu qui regarde alors son laboratoire brûler sans rien pouvoir faire. A voir le chemin fait par l'image de dieu, passant de créateur de la vie et guide de l'humanité à stagiaire ayant fait exploser son laboratoire a quelque chose de plutôt ironique. Il est donc compréhensible que beaucoup de scientifiques ont eu du mal à s'imaginer cette théorie. Il y a quelque temps, les mathématiques étaient considérées comme la langue de la nature et la mécanique devait être capable de prédire le futur ! Ce rêve a été balayé d'un coup d'aile de papillon !

Dans une première partie, nous allons vous faire l'historique de cette théorie en vous présentant

les principaux intervenants ayant participé au développement de ces idées. Le but de cette partie n'est pas de juger la théorie mais d'exposer les découvertes et les enjeux. Dans ce but, nous allons commencer à naviguer sur le fleuve historique qui a conduit aux pensées scientifiques des siècles derniers. Quels ont été les avancées technologiques qui ont été permises par le développement de cette théorie ? Grâce à quelles découvertes cette théorie a pu prendre forme ? Vous allez voir que la naissance du concept de Chaos n'aurait pas été possible si l'ordinateur n'avait pas été créé.

Puis nous allons vous démontrer la puissance de cette théorie à travers divers exemples utilisant le Chaos. Notre but est dans un premier temps de démontrer que cette théorie donne des valeurs acceptables d'un point de vue physique. Pour cela, nous allons comparer les données issues de l'utilisation des deux méthodes de calculs.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au transfert thermique dans un milieu continu puis dans un milieu discontinu. L'utilisation de la méthode classique basée sur la mécanique Newtonienne nous servira d'exemple. En effet, cette modélisation de la réalité par les calculs classiques a fait ses preuves depuis pas mal d'années. Elle est considérée comme fiable et peut donc nous donner une excellente vision de la réalité. Nous allons ensuite comparer ces résultats avec les résultats que nous avons déduits de l'étude pour la théorie du Chaos. Nous ne voulons pas ici développer une nouvelle méthodologie pour remplacer l'ancienne, il s'agit en fait de démontrer la capacité de cette théorie à modéliser différents phénomènes physiques. Nous allons voir que nous pouvons utiliser les deux théories simultanément suivant les résultats attendus ou les informations à notre disposition.

Puis dans un second temps, nous allons étudier le transfert thermique dans un fluide. Cette méthode se fait toujours par approximation car nous sommes incapables de traduire mathématiquement les phénomènes qui se passent dans un fluide. Nous allons voir s'il est possible de modéliser les mêmes phénomènes grâce à la théorie du Chaos.

Enfin, nous allons démontrer la puissance qui a été développée par cette théorie pour les problèmes à N corps. Ce problème consiste à résoudre les équations de la mécanique de Newton lorsque plus de 2 corps interagissent les uns avec les autres. La méthode mathématique classique a échoué devant ce problème et l'analyse numérique utilisant le Chaos a donné des résultats très satisfaisants.

Nous allons finir par une réflexion sur l'utilisation de cette théorie dans les différents domaines. John Horton Conway a dit : *"If experimenters have free will, then so do elementary particles."* (Si les expérimentateurs ont une volonté propre, alors il en est de même pour les particules élémentaires.). On se rappelle de cette personne pour son jeu de la vie (Conway's game of life) qui utilise les bases de la théorie du Chaos pour simuler le comportement cellulaire. Ici, il nous fait comprendre une notion importante du Chaos, c'est l'incertitude du comportement des particules élémentaires. Plus haut, nous avons parlé de l'effet papillon, Conway pose la problématique suivante : Comment peut-on être sûr que le battement d'aile des particules élémentaires ne déclenche pas un ouragan dans les résultats de l'expérimentateur ?

Un peu d'histoire

La brève histoire de l'évolution des sciences

Nous allons voir ici l'évolution des sciences depuis Galilée jusqu'à nos jours. Pourquoi depuis Galilée et pas avant ? Premièrement car nous voulons ici poser un cadre pour nous représenter l'état d'esprit des scientifiques lors de la découverte de la théorie du Chaos. Et deuxièmement car Galilée a posé les bases des réflexions scientifiques modernes.

Nous connaissons tous Galilée pour son ouvrage "El Dialogo" présentant deux vues différentes sur l'organisation des astres. C'est également cet ouvrage qui lui ouvrit les portes de l'histoire ainsi que les portes de l'inquisition. Mais outre l'écriture de ce livre, Galilée est surtout reconnu pour les scientifiques comme le père de la science moderne. En effet, à cette époque, l'Eglise affirmait que tout était écrit dans la Bible et que par conséquent, ce qui ne s'y trouvait pas était donc une volonté divine. Cela a été très bien expliqué par Saint Thomas qui disait que si une pierre tombait, c'est tout simplement que sa place était par terre. Puis apparut Galilée. Il avait lu la Bible et était d'ailleurs un chrétien convaincu mais pour lui, il y avait mieux à faire pour comprendre le monde qui l'entoure que d'aller farfouiller dans ce livre. Pour lui, la nature est un livre écrit en langage mathématique. C'est donc tout naturellement que pour comprendre, prévoir et même reproduire ce phénomène, il suffit de développer les mathématiques propres aux observations que l'on en a fait.

La philosophie est écrite dans ce très grand livre qui est continuellement ouvert devant nos yeux, mais il ne peut être compris à moins que d'abord on en apprenne le langage, et que l'on connaisse les caractères qui sont des triangles, cercles et autres figures géométriques. Galilée Saggiatore 1623

Cette phrase est la base de la démarche scientifique de nos jours. Il est intéressant de voir que c'est également seulement à partir de cette démarche que nous validons ou invalidons les théories qui sont proposées. Certains philosophes trouvent que nous avons perdu notre rapport avec la nature depuis Galilée. Dans son livre "Galilée et les indiens. Allons-nous liquider la science ?", Etienne Klein nous amène à une réflexion sur les tribus indiennes canadiennes qui ont un rapport plus proche à la nature ce qui ne les empêche pas de développer leurs conceptions de la nature. Et de grandes civilisations ont elles aussi réalisé différentes percées dans les domaines mathématiques ou scientifiques sans pour autant utiliser la méthode déductive de Galilée.

La science "Classique" fut développée par Newton qui, suivant les enseignements de Galilée, découvrit le calcul différentiel et put en déduire les lois de la gravitation. Dès lors, le mouvement des astres ne reposait plus sur la volonté divine mais sur des équations que l'on devait résoudre. Une seule théorie pouvait maintenant décrire une multitude de phénomènes différents. On pouvait en déduire les éclipses, les marées, la propagation des ondes... La méthode est toujours la même, on observe un phénomène puis on le met sous la forme d'une équation différentielle. Après résolution, il nous reste à changer la variable t pour déterminer les positions à tout moment de l'objet. Dès lors, la vision de la science était déterministe. Il ne restait plus d'espace dans cette science pour une quelconque volonté divine. Isaac Newton le dit lui-même : *"God created everything by number, weight and measure"*. (Dieu a créé toutes choses grâce aux nombres, aux poids et aux mesures) Nous le voyons, dieu est encore très présent dans les esprits à l'époque. Newton le reclasse comme un architecte ayant créé

les règles que la nature doit suivre. Pour lui, les lois physiques ont été tellement bien écrites que l'univers pourrait même très bien se passer de son créateur mais il ouvre la porte à la possibilité d'une présence constante pour rajuster certains paramètres.

Après Newton commença le développement de la science. Les équations commençaient à expliquer la plupart des problèmes qui ont mis en échec les générations antérieures de physiciens et on ne voyait pas où celle-ci pourrait s'arrêter.

Au cours du XVIIIème siècle, l'évolution de la place des sciences en Europe put être résumée en une phrase de Galilée : Contentez - vous de nous dire comment on va au ciel, et laissez - nous le soin de dire comment va le ciel. C'est à cette époque que Laplace prit pour la première fois conscience des imprécisions que nous pourrions avoir lorsque nous voulons réaliser des observations. Ce mathématicien se fit remarquer par son essai sur les probabilités publiées en 1778 et qui ouvrit la voie aux calculs d'incertitudes appliqués à la mécanique. Pour lui, il était impossible de concevoir une entité capable, en un instant donné, d'embrasser tous les rapports des objets pour amener à une véritable prédiction. Déterministe convaincu, il pensait que les probabilités étaient un moyen de raisonner sur un problème où certains paramètres ne peuvent pas être connus. Pour Laplace : *Les progrès de l'astronomie future dépendent de trois choses, la mesure du temps, celle des angles et la perfection des instruments d'optique. Les deux premières ne laissant malheureusement presque rien à désirer, la troisième représente toutes nos espérances.* Il n'avait aucun doute sur la puissance de la science et évaluait même qu'il n'y avait plus grand chose à découvrir. Il fut cependant incapable de résoudre les équations de Newton lorsque le nombre d'objets célestes dépassait 2, mais comme il était persuadé que de petites approximations ne peuvent mener qu'à de petites erreurs, personne ne lui reprocha.

Cette mécanique tourna parfaitement jusqu'à ce qu'un premier grain de sable fut déposé dans ses rouages. En 1889, Oscar, roi de Suède, organisa un concours. Le thème était la remise en question de la stabilité du système solaire mais le véritable problème était la résolution des équations de Newton avec 3 planètes. Et ce fut Henri Poincaré qui conclut ce concours. La conclusion était que les trajectoires des trois planètes seraient de toute façon imprévisibles car les trois planètes interagissent entre elles et la trajectoire résultante était imprévisible. Il faut noter que pour réfléchir à ce problème, Poincaré décida d'utiliser la géométrie et inventa au passage une nouvelle branche des mathématiques. C'est lors de cette recherche que la mécanique de Newton a démontré ses limites. Dès lors, les scientifiques ne voyaient plus le système solaire comme une horloge mais comme un système instable. D'ailleurs, dans son livre "Science et Méthode", il expliqua sa découverte en ces termes : *Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux : une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers.*

Poincaré n'avait pas les outils à l'époque pour développer ses idées, mais l'idée venait de faire son cocon et attendait tranquillement son heure. Mais l'idée de déterminisme en science, subsista jusqu'à l'arrivée d'Heisenberg. Ce fut ce scientifique allemand qui démontra l'impossibilité de connaître à la fois la position et la vitesse d'un électron. En effet, en mécanique quantique, les mesures faites sur les particules élémentaires vont obligatoirement modifier le comportement de ces particules.

Les découvertes de Poincaré furent passées inaperçues durant le début du XXème siècle. La majorité des scientifiques étaient trop occupés par le grand débat que la mécanique quantique avait

lancé. La communauté scientifique était partagée entre les déterministes, qui étaient représentés par Einstein et qui soutenaient la mécanique classique et la relativité, et les probabilistes, menés par Heisenberg qui défendaient la mécanique quantique. La seule région où cette querelle ne s'est pas développée était le bloc de l'Est. Les scientifiques russes étaient encouragés par le gouvernement à travailler sur une vision réaliste de monde en science et de nombreux laboratoires de recherche se développèrent sur ce concept.

Pour le régime communiste, la guerre entre les scientifiques occidentaux n'était qu'une question d'idéologie et le phénomène de turbulence fut particulièrement étudié par les physiciens et mathématiciens russes. Il convient de citer Andreï Kolmogorov, un mathématicien soviétique ayant beaucoup travaillé sur les probabilités. Pour lui, certains phénomènes sont déterministes, certains sont probabilistes mais il n'existe aucune frontière naturelle entre ces différents phénomènes. En clair, Kolmogorov théorise qu'il y a toujours une partie probabiliste dans un phénomène déterminé. Dans les domaines de la dynamique non linéaire, les soviétiques avaient une avance considérable sur les scientifiques occidentaux mais dans un contexte de guerre froide, le partage des connaissances ne fut pas la priorité. Ces travaux se sont cependant très rapidement trouvés dans une impasse car n'ayant pas d'outils informatiques, les russes n'ont jamais pu développer leurs idées à la manière de Lorenz.

La théorie du Chaos : une redéfinition des sciences

La théorie est née dans les années soixante. Si certains pensent que l'époque a contribué au succès de la théorie, sa naissance est due à une invention qui fit ses premiers pas dans les couloirs du M.I.T. : l'ordinateur. C'est d'ailleurs dans ce lieu que cette théorie fit ses premiers pas.

La personne qui donna naissance à la théorie du Chaos fut Edward Norton Lorenz. Ce fut un mathématicien professeur au M.I.T. ayant développé une passion pour les problèmes mathématiques qui n'avaient pas de solution. Durant la seconde guerre mondiale, il fut dépêché comme météorologiste pour l'armée de l'air américaine, il garda cette passion pour la météo ce qui fit de lui un marginal comparé à ses collègues qui étaient de purs mathématiciens. Ce fut donc la réunion de ce physicien un peu solitaire et de l'un des premiers ordinateurs (un Royal McBee LGP-300) qui mena à la découverte de cette théorie.

Pour mieux comprendre la découverte de Lorenz, nous allons faire quelques rappels sur le sujet d'étude qui allait donner naissance au Chaos : "Les prévisions météorologiques". L'objet de l'étude est la prévision du déplacement de masses d'air dans l'atmosphère. Dans la méthode classique, nous utilisons la mécanique de Newton pour déterminer la trajectoire d'un corps à partir de l'étude de son mouvement. Cela nous donnait des équations différentielles qui une fois résolues nous permettaient de faire des prévisions sur le comportement des corps étudiés. Bien que cette méthode fût très efficace pour prédire les phénomènes astronomiques, les marées ou les trajectoires des pommes qui tombent des pommiers, elle fut mise en échec lorsque l'on parlait de champs de particules. C'est au XVII^{ème} siècle que des mathématiciens tel que Euler et Lagrange permirent l'élargissement de la mécanique Newtonienne aux champs et traduire ces équations différentielles pour englober le mouvement de plusieurs particules. Le monde était devenu prévisible. Le futur n'était que quelques équations différentielles à résoudre et l'horloge de l'univers pourrait commencer à nous raconter ses secrets.

La météorologie consiste à prévoir les déplacements de masses d'air dans l'atmosphère. Selon la logique Newtonienne, il suffisait donc de traduire en langage mathématique ces déplacements et de résoudre ces équations ! La prévision du temps pourrait donc être prévisible comme le mouvement des planètes. Or, même si les scientifiques ont pu traduire les mouvements observés dans l'atmosphère en équations, lorsque le temps est venu pour les résoudre, l'horloge de l'univers démontra qu'elle

avait encore quelque secret et qu'elle n'était pas disposée à laisser filer ces derniers. Certaines des équations furent très difficilement résolubles et d'autres ne l'étaient tout simplement pas. La méthode utilisée alors fut de simplifier les équations. Cette méthode, très peu fiable mais permettant de sortir néanmoins des résultats exploitables fut la solution à ces problèmes complexes. La mécanique de Newton nous disant que "les effets sont proportionnels aux causes", les termes mathématiques compliqués qui ne jouaient qu'un rôle mineur furent donc tout simplement supprimés des équations. Vous commencez à voir venir le papillon ? Et bien revenons à la météo. Le phénomène de déplacement des masses d'air repose sur le phénomène de convection : l'air chaud monte et l'air froid descend. Le soleil chauffe la terre qui à son tour chauffe l'air et le phénomène de refroidissement de l'atmosphère génère des cellules de convections à grande échelle. Lors de prévisions météo, il faut également tenir compte de la différence de température des pôles, de la différence de pression entre les différentes couches de l'atmosphère, de la rotation de la terre et d'une multitude d'autres facteurs qui peuvent intervenir (ex : une chaîne de montagne gênant la progression des masses d'air...) mais aussi des mouvements internes à cette masse d'air. Nous avons donc le dilemme suivant : Soit les expérimentateurs étaient amenés à établir des équations différentielles aussi précises que possible mais se retrouvaient avec des calculs très longs et un besoin énorme de données nécessaires, soit il fallait simplifier les équations le plus possible et les solutions seraient plus générales. C'est cette dernière qui mena Edward Lorenz sur l'expérience qui fut le départ d'une nouvelle science.

Tout cela nous ramène en 1961. A cette époque, les premiers ordinateurs n'étaient guère plus puissants que la calculette que vous utilisez pour faire vos comptes et ils étaient comparables en taille à un frigo couché sur le flanc. Leurs performances pouvaient faire perdre leur patience aux plus patients des informaticiens modernes. C'est avec ce genre d'appareil que Lorenz fit ses simulations. Il vit dans cet appareil, la possibilité d'effectuer de nombreux calculs répétitifs pour tester les modifications des paramètres dans ses équations et d'expérimenter ses idées en simulant ses hypothèses. Avec ses simulations, il pouvait déterminer si un modèle correspondait à la réalité observable ou s'il devait être abandonné. Cette méthodologie ne fit pas l'unanimité parmi ses collègues qui, en tant que mathématiciens, mettaient un point d'honneur à suivre les enseignements de Platon selon lesquels associer une image à un concept était le chemin pour introduire de fausses réalités dans le fruit du monde.

Lorenz fit donc ses simulations sur l'ordinateur du M.I.T. Les machines n'avaient pas d'écran à l'époque et les résultats sortaient sous forme de colonnes à six décimales. Lorenz a donc amélioré son modèle en testant plusieurs facteurs, en changeant les scénarios de météo tout en cherchant comment évoluaient les masses d'air. Lors d'une journée d'hiver, Lorenz fit une Nième simulation et, voulant probablement vérifier certains résultats, relança la simulation avec les mêmes données d'entrée. Il faut savoir que ces ordinateurs chauffaient autant qu'ils étaient lents et que la température dans la pièce contenant ce dernier après les expériences de Lorenz devait atteindre des sommets. Cela eut comme conséquence que notre cher physicien, au lieu de rentrer les mêmes données d'entrée à la décimale près, se contenta de facteurs légèrement arrondis de 3 décimales. Il est vrai qu'à cette époque, tout le monde était persuadé que l'incertitude arrondi au millième n'allait pas changer à ce point les résultats !

C'est ici que notre papillon entre en scène. Revenant dans la salle quelque temps plus tard, Lorenz examina ses résultats et là, un ouragan ! Même si les données de départ étaient très semblables, plus la variable temps progressait, plus les résultats s'écartaient des résultats de la série précédente. Au bout d'un moment, les prédictions n'avaient plus rien à voir avec les prévisions précédentes.

Ces résultats viennent perturber une des idées scientifiques les plus fondamentales. Newton disait que les effets sont proportionnels aux causes, seulement ces résultats nous montrent que même si certains effets sont considérés comme mineurs, il ne faut pas non plus les négliger. Un effet mineur peut être responsable d'un évènement majeur si celui-ci était amplifié par interaction de proche

en proche. Et nous pouvons le voir dans notre vie de tous les jours ! N'avez-vous jamais vu des bouchons sur les routes où aucun évènement ne semble avoir causé cela ? Et bien ces problèmes de circulation sont parfois dus à un trafic dense et de petits ralentissements de certains automobilistes. Ces ralentissements font freiner les voitures suivantes puis cette onde va se propager de proche en proche jusqu'à créer un embouteillage.

Après cette découverte, Lorenz prit l'image du papillon pour illustrer ses propos. La modification des données d'entrée était si faible qu'il l'a comparé à l'effet pouvant être produit par une aile de papillon et les résultats étaient tellement différents qu'ils allaient changer à jamais le regard des scientifiques. Comme un ouragan déferlant sur une ville, le paysage scientifique allait être bouleversé par cette expérience.

La météo moderne tire les leçons du travail de Lorenz. Les prévisions météorologiques demandent la création de postes d'observations situés à moins de 100 km les uns des autres dont la fonction est de récolter des informations sur notre atmosphère comme la pression, la température. . . En tout, c'est près d'un million de données qui sont traitées par d'énormes ordinateurs pour afficher des prévisions qui généralement ne sont fiables que pour les deux à trois jours. En pratique, pour que les résultats concordent avec l'évolution de la météo, il faut tellement de données et ces dernières doivent être tellement précises que la météo à long terme est tout simplement incalculable. Les calculs du physicien David Ruelle prétendent même démontrer que pour prévoir le temps après quinze jours, il faudrait être capable de tenir compte de l'effet gravitationnel d'un électron situé à 10 années lumières de la Terre. Cette démonstration, même si elle ne doit pas prendre en compte les principes de la relativité générale, nous démontre la très grande complexité des prévisions météo.

La géométrie de la nature

Cependant, la théorie du Chaos n'avait pas cessé de nous surprendre et la révolution vint d'un problème mathématique proposé par Georg Cantor au XIXème siècle : La poussière de Cantor. Le problème est le suivant. Prenez un segment et enlevez le tiers central. Vous vous retrouvez avec deux segments. Répétez l'opération sur ces deux segments. Vous vous retrouvez avec quatre segments. Répétez l'opération à l'infini et le nuage de points résultant s'appelle le nuage de Cantor.



Mais le coup de génie vint d'un mathématicien français nommé Benoit Mandelbrot. Cet individu était un touche-à-tout des mathématiques. Ayant intégré l'école Normale puis Polytechnique, et quitta l'institution académique française pour aller travailler dans le centre de recherche d'IBM aux Etats Unis. Jamais il ne trouva de reconnaissance pour ses travaux car ceux-ci n'étaient pas considérés comme appartenant aux mathématiques.

Il tomba sur un problème qui intéressa son directeur : la présence de bruits sur les lignes téléphoniques transmettant l'information d'ordinateur à ordinateur. Il faut savoir que pour transmettre des données entre eux, les ordinateurs les envoient sous forme de paquets d'information et ces bruits pouvaient corrompre l'information contenue dans ces paquets. Les ingénieurs avaient remarqué que s'ils augmentaient l'intensité, ces bruits pouvaient être étouffés mais qu'ils ne pouvaient jamais disparaître complètement. Et plus on observait ces bruits avec précision, plus la complexité de ces derniers augmentait. Cependant, Mandelbrot finit par percevoir une certaine régularité sur l'apparition des bruits. Lorsqu'il décomposa sa journée en heures, il pouvait y avoir certaines heures

sans erreur puis plusieurs erreurs dans la même heure. Puis en décomposant ces heures en minutes, nous avons un schéma semblable. Plusieurs minutes pouvaient se passer sans erreurs et une minute pouvait contenir plusieurs erreurs. Mandelbrot découvrit que le rapport des périodes dépourvu d'erreurs aux périodes avec erreurs restait constant quelle que soit l'échelle d'observation utilisée (heures, minutes, secondes). Avec toutes ces données, Mandelbrot retrouva les schémas caractéristiques du nuage de Cantor.

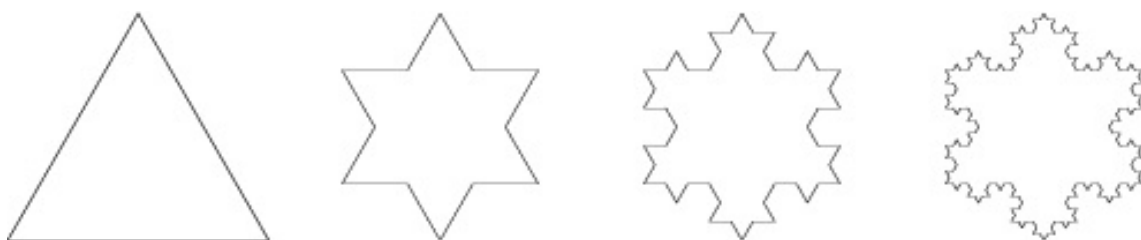
Ce qui fût un problème abstrait devint d'une importance pratique colossale pour les scientifiques qui durent mettre en place des mesures pour contrer ce problème. La nature même de ce problème de bruit démontra qu'il n'y avait aucune cause à cela. Certains ingénieurs avaient pour un temps cherché un technicien jouant avec son tournevis dans les labos mais l'effet était de nature chaotique.

Suite à cela, Mandelbrot étudia de nombreux phénomènes différents allant des crues du Nil à l'évolution des prix des produits dans l'économie. Il réussit à créer une nouvelle forme d'étude de l'espace où il redéfinit les dimensions mathématiques. Pour se représenter cela, nous allons partir des mathématiques dans un repère Euclidien, nous pouvons avoir un nombre entier de dimensions (par exemple, nous avons 2 dimensions pour un plan, 3 dimensions pour un volume. . .). Mandelbrot émit l'idée qu'un objet peut avoir un nombre fractionnaire de dimensions. Cette modification permit de mesurer les caractéristiques d'un objet qui ne pouvait être décrit clairement par les études classiques comme la rugosité, l'irrégularité ou le degré de fragmentation. Cette explication peut sembler floue, nous allons donc se poser la même question que Mandelbrot dans un de ses articles : « Combien mesure la côte de la Bretagne ? »

Si vous observez une carte de la Bretagne, vous vous rendez vite compte que la mesure peut s'avérer difficile. La côte contient de nombreux accidents et la possibilité de calculer la longueur de la côte va dépendre de la technique utilisée. Par exemple, si nous prenons notre règle et que nous avons une carte au 1/100 000ème, nous allons avoir une assez grosse incertitude sur les accidents le long de la côte. Si nous prenons maintenant une carte au 1/1 000ème, les imprécisions sur la mesure seront moindres. Et si nous allons nous promener le long de la côte en comptant nos pas, nous réduirons encore cette incertitude. Dans la méthode de Mandelbrot, nous allons appeler les accidents de la côte « rugosité » et nous allons donner une valeur dimensionnelle à cette rugosité.

Lors de la rédaction de son premier grand livre, il fallut qu'il donne un nom à ces figures venant tout droit de sa géométrie. Il donna donc le nom de « fractal » (du latin fractus : briser). D'une manière, une fractale est une manière de voir l'infini.

Imaginez ici un triangle de 3cm de côté. Divisez ces côtés en trois, enlevez le segment du milieu et ajoutez deux segments de 1cm chacun formant un triangle équilatéral dirigé vers l'extérieur du triangle (Vous avez ici une étoile). Répétez cette opération à l'infini, le résultat final vous donne ce que l'on appelle un flocon de neige de Koch. La particularité de cette figure est que sa circonférence est infinie (en effet, nous multiplions la longueur du périmètre par $4/3$ à chaque manipulation) et d'une surface finie (l'objet peut toujours être contenu dans le cercle circonscrit du triangle initial. D'ailleurs, si vous observez l'une des branches de cette figure, vous pouvez observer une grande similitude avec les côtes de la Bretagne.



Mandelbrot avait commencé à définir l'image d'une réalité différente de celle que nous avons l'habitude d'utiliser : l'invariance d'échelle. Pour se représenter cela, nous pouvons imaginer une

personne se trouvant dans une pièce dont les murs sont des miroirs. La même image peut être retrouvée théoriquement indéfiniment selon le grossissement de l'image initiale. Nous retrouvons cette récurrence dans les graphiques que Mandelbrot avait créés lors de ses études des cours boursiers ou des débits fluviaux. Nous retrouvons également ces motifs dans certaines fractales comme dans le flocon de neige de Koch.

So, naturalists observe, a flea Has smaller fleas that him on prey ; And these have smaller still to bite 'em ; And so proceed ad infinitum.	<i>Ainsi, observe les naturalistes, une puce ; A de plus petites puces qui l'ont comme proie ; Et celles-ci en ont des plus petites les mordant ; Et ainsi de suite jusqu'à l'infini.</i>
---	---

Poème par Jonathan Swift

Ce genre de géométrie peut se retrouver dans la nature. Prenez par exemple les vaisseaux sanguins. Dans notre corps, ces conduits se divisent en conduits plus petits qui se divisent à leurs tours. Le volume de ces vaisseaux ne représente que 5% du volume total du corps humain. Pourtant la longueur totale du réseau est équivalente à 2 fois la circonférence de la Terre et sa surface est supérieur à 3 terrains de basket. Ce type de complexité n'est pas unique dans le corps humain. Nous pouvons citer également les poumons ou la problématique évolutive fut de renfermer une surface très importante dans un espace le plus faible possible. Il fallut plusieurs années pour que certains biologistes théoriciens ne s'intéressent aux travaux de Mandelbrot et découvrent que les organisations fractales étaient en accord avec les données.

Cette organisation a de fait considérablement simplifié les organisations de la nature. Dans la géométrie euclidienne, l'organisation de la nature est très complexe et demande beaucoup d'informations. Par contre, si nous représentons des objets fractals, ces organisations admettent une solution beaucoup plus simple et donc une quantité d'information beaucoup plus faible. Contrairement aux fractales, les recherches sur l'invariance d'échelle ont eu un plus grand succès dans l'imagination populaire que dans la recherche scientifique. En effet, contrairement au dessin animé « La Vie », le corps humain n'est pas peuplé de petites répliques de lui-même se promenant dans ses vaisseaux. Nous pouvons ici nous servir de la logique des Shadoks pour mieux comprendre la notion d'échelle. Prenons un fil. Si nous le regardons de face, le diamètre est tellement petit que nous pouvons le représenter comme un point. Nous avons donc un objet de dimension 0. Si nous regardons ce fil de côté, nous avons alors un objet d'épaisseur très faible et d'une longueur calculable. Nous sommes donc passé à un objet de dimension 1. Maintenant, imaginez une pelote faite avec ce fil. Nous sommes alors avec un objet de dimension 3. Enfin, imaginons que cette pelote est posée sur un mur à grande distance. Cet objet est à nouveau un objet de dimension 0. Maintenant, si nous regardons cet objet de côté, avons-nous un fil ? Ce jeu de logique est parfait pour vous représenter l'impossibilité de l'invariance d'échelle dans un monde tel que le nôtre tout en démontrant la variation de perspective suivant l'échelle utilisée.

Approche de la théorie du Chaos

Le phénomène de conduction thermique

La transmission de chaleur est un phénomène irréversible. En effet, le flux de chaleur ira toujours des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides et jamais dans l'autre sens. L'existence de ce phénomène est déterminée par l'existence d'une différence de température entre deux milieux. Si la température est homogène, on dit que le milieu est en équilibre et il n'y a pas de transfert de chaleur. C'est l'application du deuxième principe de la thermodynamique. Ce phénomène est le plus abordable de la thermique, c'est pour cela que nous allons commencer par ce principe pour démontrer l'utilité de la théorie du Chaos et le réalisme de ses résultats.

La transmission de chaleur, comment se le représenter ? C'est simple, quand vous faites la cuisine dans une poêle ou une casserole tout en métal, au bout d'un moment, vous remarquez que sans gants de cuisine, il est difficile de prendre en main votre appareillage tellement le manche est chaud ! (Cela se retrouve aussi avec les manches en plastiques mais étant donné que le plastique conduit beaucoup moins la chaleur, vous pouvez prendre en main le manche sans vous brûler) La description de ce phénomène est simple, une source de chaleur va donner de l'énergie à votre casserole qui va chauffer et transmettre cette chaleur aux aliments que vous voulez faire cuire et à son manche. Étant donné qu'il y a contact direct avec les aliments et la poignée, on dit que cette transmission de chaleur se fait par conduction.

Lors de ce transfert de chaleur il n'y a aucun déplacement de matière. Il se fait donc dans des milieux solides mais peut avoir lieu dans des fluides immobiles. Dans le domaine du Génie Civil, les calculs de performance des bâtiments se fait grâce aux équations de conduction thermique en régime permanent. Cela veut dire que les calculs dans ce domaine ne tiennent pas compte des variations de température au cours du temps. Dans la réalité, nous nous trouvons toujours dans des conditions d'un régime variable et cela nécessite le recours à des équations plus complexes.

La relation modélisant la transmission thermique de la chaleur par conduction a été découverte par Joseph Fourier en 1822. Cet homme fut un mathématicien et physicien français et il laissa sa trace dans l'histoire pour ses travaux sur les séries de Fourier (décompositions de fonctions périodiques) et sur leurs applications à la thermique. Ses travaux en mathématiques seront utilisés dans de nombreux domaines comme l'acoustique ou l'électricité. Ils seront aussi responsables de plusieurs maux de crânes de nombreux étudiants. Ses travaux en thermiques ont également amené à la naissance de la thermodynamique.

Démonstration de l'équation de la température

Dans un premier temps, nous allons développer la logique ayant donné lieu aux équations de la thermique classique. Puis nous allons nous poser la question de l'utilité de la théorie du Chaos dans la résolution de ce genre de problème. Cependant, et avant de commencer à dérouler nos équations, nous allons poser certaines formules de base.

Nous avons premièrement le flux de chaleur, celui-ci représente le transfert d'énergie entre deux points ayant des températures différentes dans le temps. Un flux constant représente donc un transfert d'énergie constante dans le temps. Pour représenter cela mathématiquement, nous allons noter le flux de chaleur Φ , l'énergie interne du système Q et le temps t . Nous avons donc la formule suivante :

$$\Phi = \frac{\partial Q}{\partial t} \iff \int \Phi dt = Q$$

Nous allons également utiliser la densité de flux de chaleur que nous allons noter φ . Cette grandeur représente la quantité de chaleur qui traverse une surface que l'on va noter S pendant un temps donné. Autrement dit, nous pouvons le calculer en prenant le flux de chaleur traversant la surface. Nous avons donc la formule suivante :

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \iff \int \int \varphi dS = \Phi$$

Nous voulons déterminer les températures en tout temps et en chaque point d'un objet grâce à une fonction tel que $T = f(x, y, z, t)$ où x, y, z sont des variables spatiales et t est la variable temporelle.

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser la loi de Fourier. Nous avons ici le paramètre λ qui est le coefficient de conductivité thermique dépendant du matériaux étudié et T la température selon les coordonnées spatiales.

$$\varphi = -\lambda \overrightarrow{grad T}$$

Le gradient est un outil mathématique permettant de représenter la variation d'une fonction par rapport à ses différents paramètres. Ici, la température varie en fonction de ses coordonnées spatiales. Dans le cas d'un transfert de chaleur, le gradient aura une valeur négative car le flux sera toujours orienté des hautes températures vers les basses températures. Pour avoir un flux de chaleur positif, nous ajoutons à cette équation un "—" devant la formule.

Maintenant que nous avons posé nos équations, nous allons tenter de résoudre le problème du transfert de chaleur. Pour commencer, nous allons nous représenter une petite unité du solide que nous allons étudier. Pour simplifier la compréhension, nous allons imaginer un cube infiniment petit devant le solide que nous allons étudier. Ce cube aura un volume V égal à Ω et une surface S égal à Π . Nous voulons ici transformer notre formule du flux de chaleur pour faire apparaître le volume. Pour cela, nous allons utiliser le théorème de Gauss suivant :

$$\int \int X.dS = \int \int \int \overrightarrow{div}(X).dV$$

Nous pouvons alors appliquer ce théorème à l'équation que nous avons précédemment :

$$\int \int_{\Pi} \varphi.dS = \int \int_{\Pi} -\lambda \overrightarrow{grad T}.dS = \int \int \int_{\Omega} \overrightarrow{div}(-\lambda \overrightarrow{grad T}).dV$$

Dans cette formule, il est intéressant de faire apparaître le flux de chaleur Φ à gauche. Nous pouvons ensuite faire apparaître l'énergie Q en dérivant le tout par le temps. Nous allons avoir pour

finir la formule suivante :

$$Q_1 = \int \int \int_{\Omega} \overrightarrow{div}(-\lambda.\overrightarrow{gradT}).dV.dt$$

Nous avons ici la fonction mathématique décrivant la quantité de chaleur se trouvant dans notre volume Ω . Lorsque nous étudions le phénomène de transmission de chaleur, nous pouvons être amenés à considérer des matériaux dans lesquels il peut y avoir production de chaleur. C'est le cas par exemple de la radioactivité. Nous pouvons prendre l'exemple des barres d'Uranium dans le réacteur d'une centrale nucléaire. Pour prendre en compte la production de chaleur dans notre volume, nous pouvons ajouter une grandeur κ qui sera le flux de chaleur créé dans le volume Ω . Cette grandeur sera fonction du temps et des coordonnées spatiales. On a donc la quantité de chaleur produite dans notre volume :

$$Q_2 = \int \int \int_{\Omega} \kappa(x, y, z, t).dV.dt$$

Nous avons donc la quantité de chaleur Q_1 représentant l'énergie transmise par conduction et la quantité de chaleur Q_2 représentant l'énergie créée dans le volume étudié. Nous savons que cette énergie nous est donnée par l'équation de la calorimétrie :

$$Q_f = \int \int \int_{\Omega} \rho.C_v.\frac{\partial T}{\partial t}.dV.dt$$

Nous savons que le bilan énergétique pour le volume Ω nous est donné par l'équation de la calorimétrie suivante :

$$Q_f = Q_1 + Q_2$$

$$\int \int \int_{\Omega} \rho.C_v.\frac{\partial T}{\partial t}.dV.dt = \int \int \int_{\Omega} \overrightarrow{div}(-\lambda.\overrightarrow{gradT}).dV.dt + \int \int \int_{\Omega} \kappa(x, y, z, t).dV.dt$$

$$\rho.C_v.\frac{\partial T}{\partial t} = \overrightarrow{div}(-\lambda.\overrightarrow{gradT}) + \kappa(x, y, z, t)$$

Dans cette équation, C_v est la capacité thermique molaire, c'est-à-dire la quantité d'énergie qu'il faut pour amener une mole d'un élément à gagner 1°C de température. Nous prenons également comme constante ρ , la masse volumique. L'analyse de cette équation nous permet de déduire que l'énergie interne totale du volume Ω est déterminée par l'élévation de température de ce même volume dans l'intervalle de temps choisi car nous avons posé comme constante les valeurs C_v et ρ . Nous pouvons alors poser l'équation suivante :

$$\rho.C_v.\frac{\partial T}{\partial t} = \overrightarrow{div}(-\lambda.\overrightarrow{gradT}) + \kappa(x, y, z, t)$$

Dans cette dernière équation, nous nous retrouvons avec un terme assez compliqué qui est $\overrightarrow{div}(-\lambda.\overrightarrow{gradT})$. Nous avons pris le terme λ constant en fonction du temps donc nous pouvons le sortir de la divergente. Par une résolution mathématique que nous n'allons pas démontrer ici, nous pouvons alors poser que $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{gradT}) = \Delta T$ où Δ représente l'outil mathématique Laplacien. Cet outil mathématique est très utile lorsque nous avons besoin de linéariser des fonctions. Nous avons donc la formule finale suivante :

$$\rho.C_v.\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda.\Delta T + \kappa(x, y, z, t) \quad (1)$$

Les limites de la mécanique classique

Nous allons dans cette partie nous placer à la place d'un physicien voulant utiliser la mécanique classique. Pour cela, nous allons étudier un problème simple.

Dans notre expérience, nous allons prendre une plaque constituée d'un matériau homogène. Cette plaque aura les caractéristiques suivantes :

- Largeur de la plaque : l
- Longueur de la plaque : L (on considèrera la longueur comme infinie)
- Nous considèrerons qu'il n'y a pas de création de chaleur : $\kappa = 0$

Nous allons appliquer une source de chaleur à la base de la plaque. Nous allons considérer que cette source a une température égale à T_1 et que les températures des côtés de la plaque sont à la température T_0 . Le flux de chaleur va donc se diffuser le long de la plaque vers le haut.

Lorsque nous étudions ce problème, nous pouvons alors modifier l'équation (1) de la chaleur :

$$\rho.C_v.\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda.\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad (2)$$

C'est à partir de maintenant que nous allons nous apercevoir de la limite de la mécanique classique. Les outils mathématiques dont nous disposons aujourd'hui ne nous permettent pas de résoudre cette équation. Pour pouvoir la résoudre, nous devons nous placer dans un état d'équilibre, c'est à dire lorsque la variation de température en fonction du temps est nulle : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$.

C'est à partir de cela que nous pouvons maintenant déterminer les limites de notre problème ! En partant de l'équation (2), nous avons alors :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

Avant toute résolution de cette équation, nous pouvons déjà observer que celle-ci ne dépendra pas des caractéristiques du matériau. Elle sera donc semblable pour tous les matériaux, aussi différents soient-ils.

Grâce à l'équation (3), nous pouvons déduire l'équation de température de la plaque en fonction des coordonnées spatiales x et y ¹ :

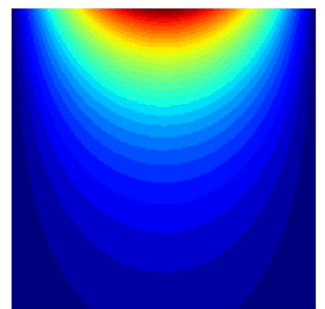
$$T(x, y) = (T_1 - T_0) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{\pi}{l} \cdot y} + T_0 \quad (4)$$

Pour une meilleure vision de ce phénomène, nous allons utiliser un programme pour déterminer visuellement les températures de notre plaque. Pour cela, nous allons fixer les caractéristiques suivantes :

- La température au niveau de la source de chaleur : $T_1 = 50^\circ C$
- La température sur les côtés de la plaque : $T_0 = 20^\circ C$

Nous avons donc une équation qui est facilement manipulable et qui peut nous donner les températures d'une manière très rapide. Je peux par exemple modifier les caractéristiques dimensionnelles de la plaque sans pour autant modifier l'équation.

Par contre, si je veux modifier la géométrie de notre objet, je dois recommencer tous les calculs et repartir avec une nouvelle équation. Maintenant que nous avons vu les limites de la mécanique classique, nous allons voir les apports de la théorie du Chaos.



1. Voir annexe : "Développement de l'équation différentielle de la transmission de chaleur par conduction"

Les apports de la théorie du Chaos

Nous allons ici repartir de l'équation (1), qui est l'équation de la chaleur que nous avons développée grâce à la mécanique classique.

$$\rho.C_v.\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda.\Delta T + \kappa(x, y, z, t) \quad (1)$$

Nous allons garder les mêmes hypothèses que précédemment, c'est à dire une température T_1 à la base de notre plaque et une température de T_0 aux autres extrémités. Nous allons également garder les hypothèses sur les caractéristiques physiques de notre plaque :

- Largeur de la plaque : l
- Longueur de la plaque : L
- Nous considérerons qu'il n'y a pas de création de chaleur : $\kappa = 0$

Ici, il n'est plus question de résoudre cette équation mais de la discrétiser. L'idée est de remplacer les dérivées partielles par un schéma mathématique. Ici, nous devons en premier décider de la "résolution" de notre échantillon. Nous allons considérer notre plaque comme un écran d'ordinateur et nous allons déterminer des "pixels" de largeur que nous allons nommer dx et de longueur que nous allons nommer dy . Nous allons également déterminer un pas de temps que nous allons nommer dt .

Nous pouvons alors écrire l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \gamma.\Delta T \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\lambda}{\rho.C_v} \quad (5)$$

Avec cette équation, nous pouvons alors discrétiser les différentes parties². Ce qui nous donne l'équation suivante :

$$\{T^{k+1}\} = [M] . \{T^k\} + \{T_{ext}^k\} \quad (6)$$

Nous allons en premier lieu expliquer ce que fait cette équation. Cette formule mathématique utilise les suites, c'est à dire que pour arriver à ce qui se passe au bout d'une minute avec un Δt de 1 seconde, vous devez effectuer le calcul 60 fois.

Ensuite, dans notre formule, nous avons des vecteurs (repérables grâce aux $\{\}$). Ces vecteurs représentent toutes les températures de tous les "pixels" de notre objet. C'est un peu comme si vous avez fait un puzzle et que pour le ranger, vous commencez par la pièce en haut à gauche, puis celle à sa droite... jusqu'à ce que vous arriviez à la fin de la ligne. Vous recommencez de même avec la ligne du dessous puis ainsi de suite.) Vous retrouvez donc votre objet mathématique composé de toutes les températures rangées dans un ordre bien précis.

Enfin, nous avons la matrice de passage (repérable grâce aux $[]$). Cet opérateur va nous permettre de poser les bonnes opérations aux bons endroits.

En fait, l'opération est très simple, nous allons expliquer cela en utilisant un seul pixel. Pour chaque côté de notre petit carré, nous allons calculer la quantité de chaleur qui traverse chaque côté dans le Δt précédemment sélectionné. C'est un peu comme si vous aviez une pièce dont vous connaissez le nombre de personnes et que cette pièce soit équipée de capteurs à ses portes pouvant compter les entrées et les sorties. Au bout d'un temps donné, vous pouvez toujours connaître le nombre de personnes dans votre pièce.

L'utilisation des matrices et des vecteurs va permettre de faire cette opération sur tous les "pixels" de notre plaque. Cependant, ces opérations étant longues, l'outil informatique est donc très apprécié. Vous pouvez alors commencer à comprendre en quoi l'arrivée de l'ordinateur a été une condition pour le développement de cette théorie.

2. Voir Annexe : Discrétisation de la transmission de chaleur par conduction

Il faut maintenant faire attention avec cela. Si nous utilisons une très grande résolution, nous devons également utiliser un pas de temps beaucoup plus court pour avoir des résultats crédibles. Cela veut donc dire que le nombre de calculs effectués par l'ordinateur sera très élevé. Nous devons alors trouver le bon compromis entre la précision voulue pour notre étude et le temps de calcul. Nous retrouvons ici une limite qui peut nous rappeler les limites présentes en quantique. En effet, nous ne pouvons pas avoir une précision infinie avec un temps de calcul court.

Grâce à un petit programme simple, nous avons pu modéliser l'évolution des températures dans notre plaque en fonction du temps. Cela nous donne le résultat ci-dessous :

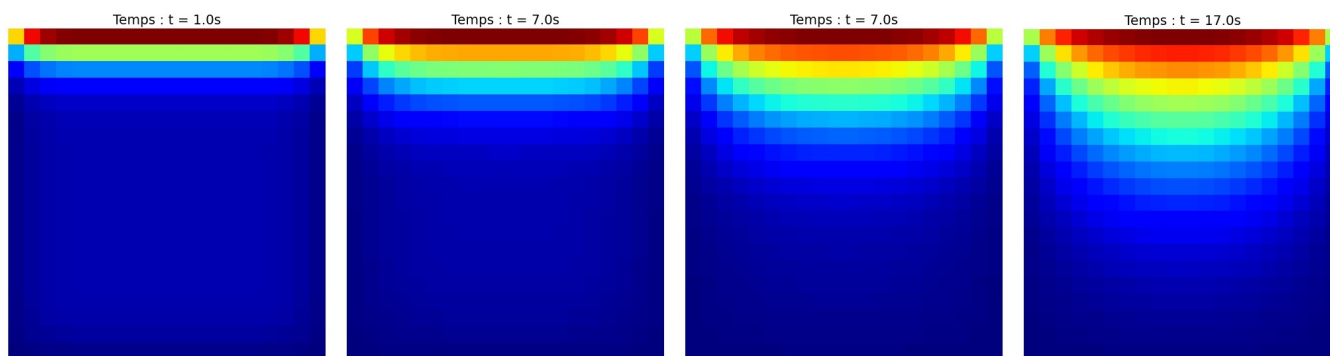


FIGURE 1 – Évolution des températures dans la plaque en fonction du temps. ($\mu = 0.5$)

Discussion

Le but de cette partie était de pouvoir comparer la mécanique classique à celle de la mécanique chaotique. Nous pouvons voir que l'utilisation de formules mathématique nous permet d'avoir les résultats à l'état d'équilibre du système. Ce genre de résultat peut être très utile pour des géométries simples et pour certains cas comme la thermique du bâtiment (où la formule pour déterminer les déperditions dans les parois vient du développement de notre formule. Cependant, il est important de remarquer que la théorie du chaos, bien que nécessitant un nombre très élevé de calcul, nous donne une approximation plutôt réaliste de ce phénomène et que la méthode restera semblable quelquesoit la géométrie de notre échantillon. Grâce à cette théorie, nous pouvons non seulement observer les distributions de chaleur en plusieurs points de notre objet mais nous pouvons également observer cette distribution dans le temps.

Il faut également faire remarquer que l'utilisation de la mécanique chaotique demande un grand nombre de calculs. Lors d'une modélisation, l'expérimentateur doit alors choisir entre en grande résolution et un temps très élevé de calcul ou une résolution plus faible et un temps de calcul moins long. Le choix des paramètres est également important, dans notre exemple, la matrice de passage que nous avons développée ne doit pas avoir de paramètres négatifs dans sa diagonale car cela peut fausser les calculs. Cette nécessité nous montre alors que lorsque nous choisissons une grande résolution, notre pas de temps est nécessairement très faible alors que dans l'usage des mathématiques fonctionnels, notre étude nous donne une fonction qui peut alors nous donner les résultats selon les paramètres demandé. Le temps de calcul est alors grandement réduit. Lors de cette manipulation, nous avons utilisé un exemple très simple pour illustrer la méthode des suites mathématique très utilisée dans la mécanique chaotique. C'est grâce à des méthodes de ce type que Mr Conway a créé son célèbre "jeu de la vie" ou que les biologistes prédisent l'évolution des populations dans la nature. L'idée est que la répartition des cellules ou des animaux à un temps t_{futur} est donné par une relation mathématique ayant comme paramètres la répartition des mêmes élément au temps t .

Notre modélisation est donc dépendantes des conditions initiales et la configuration des températures dans notre plaque au temps $t + 1$ est dépendante de la configuration des températures dans notre plaque au temps t . Nous pouvons le voir dans l'utilisation de notre suite où notre vecteur des températures est évolutif au cours du temps. Nous avons ici notre matrice $[M]$ et notre vecteur $\{T_{ext}\}$ qui sont constant au cours du temps. Par contre, nous avons notre vecteur $\{T^k\}$ qui évolue au fur et à mesure des incréments. Nous avons alors le processus suivant :

Incrementation	Operation
1	$\{T^{k=1}\} = [M] \cdot \{T^{k=0}\} + \{T_{ext}\}$
2	$\{T^{k=2}\} = [M] \cdot \{T^{k=1}\} + \{T_{ext}\}$
3	$\{T^{k=3}\} = [M] \cdot \{T^{k=2}\} + \{T_{ext}\}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\{T^{k=n}\} = [M] \cdot \{T^{k=n-1}\} + \{T_{ext}\}$
$n + 1$	$\{T^{k=n+1}\} = [M] \cdot \{T^{k=n}\} + \{T_{ext}\}$

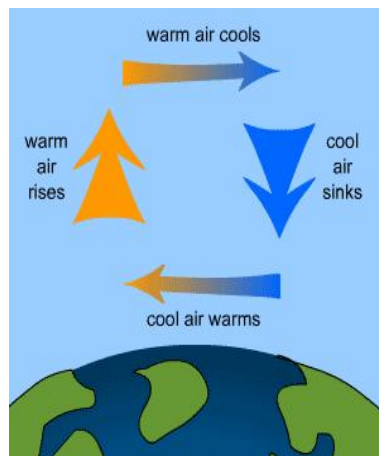
Nous avons vu ici un système qui tend vers un équilibre. Cependant, la grande force de la mécanique du chaos est de pouvoir prévoir des systèmes ne pouvant pas être prédit par les mathématiques fonctionnels. Dans le prochain chapitre, nous allons plonger dans l'univers de la météo avec Mr Lorenz pour étudier les courants convectifs qui ne peuvent être déterminer par une équation.

Le Chaos en convection thermique

Un peu de météorologie

Un système très familier considéré comme chaotique est la météo. C'est grâce à la mécanique chaotique que nous pouvons avoir des bulletins météo tous les soirs nous permettant de savoir comment nous habiller le lendemain. Cependant, ce fût un chemin très long pour arriver à prédire le temps et même encore aujourd'hui, nous ne sommes pas encore sûrs à 100% du temps que nous aurons demain. Dans cette partie, nous allons essayer de percer les mystères qui entourent les mouvements atmosphériques et les méthodes mises en place pour essayer de prédire ces changements.

Pour commencer, il est important de savoir comment bougent les masses d'air dans l'atmosphère. En fait c'est très simple, le moteur de cette remarquable mécanique est principalement le Soleil ! Et oui, certains rayons lumineux vont traverser l'atmosphère et arriver au sol lui transmettant toute l'énergie qu'ils transportent. Le sol va lui chauffer et transmettre cette chaleur à l'air. Nous avons donc un air qui se réchauffe au niveau du sol et un air plus froid dans les hautes couches de l'atmosphère. En regardant les propriétés physiques de l'air, nous pouvons voir que lorsqu'un volume donné d'air se réchauffe, sa densité diminue. Cela va donc former un mouvement, l'air plus chaud va avoir tendance à monter vers les hautes couches de l'atmosphère et l'air plus froid va avoir tendance à migrer vers le sol. Nous avons donc création de cellules de convections.



Quel rapport avec la météo ? Et bien c'est très simple, lorsque les masses d'air se déplacent elles emmènent avec elle leurs propriétés. Donc si une parcelle d'air contient une forte concentration d'eau, elle l'emmène avec elle. Nous avons ici le moteur du déplacement des nuages. Le déplacement de ces masses d'air affecte également les écarts de pression qui se dessinent et que vous voyez sur les cartes météo à la télévision.

Le problème avec la prédiction météorologique est l'interdépendance de tous les paramètres de l'atmosphère. Pour prendre un exemple, lorsque vous avez une zone de dépression, il y a un déplacement d'une masse d'air voisine. C'est ici une réaction thermodynamique, l'atmosphère s'organise pour que son enthalpie soit minimum alors qu'en même temps, le sol continue à chauffer l'air créant de

nouveau un déséquilibre. De même, l'ensoleillement n'étant pas constant à la surface de la Terre (dépendant de la situation géographique et des saisons), nous avons donc formation de diverses cellules de convections qui se retrouvent interdépendantes. Une perturbation sur l'une de ces cellules peut être retrouvée sous la forme d'une autre perturbation sur une autre cellule de convection. C'est ici l'idée qui s'est dégagée de la remarque de Lorenz : "*Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ?*"³



Lorsque Lorenz a découvert cette théorie, il étudiait la météorologie au MIT. Comme nous l'avons dit, il fut l'un des premiers à avoir pu utiliser un ordinateur ! Bien sûr, ce n'était pas du tout les mêmes machines que nous utilisons aujourd'hui ! Ces derniers occupaient une salle entière, chauffaient comme un diable et avaient une capacité de calcul inférieure aux premiers smartphones commercialisés. Il fallait donc être très patient lorsque vous vouliez faire une modélisation et chaque erreur faisait perdre du temps à vos collègues (car à cette époque, il n'y avait que quelques ordinateurs au MIT) et gaspillait énormément d'énergie.

C'est pour cela que Lorenz a commencé à réfléchir à son problème comme tout mathématicien. Il partit des équations de Navier Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = F - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \lambda \cdot \Delta T \end{cases} \quad (7)$$

Ici, nous avons la première équation qui représente la conservation de masse dans le fluide. C'est à dire que si nous prenons toute l'atmosphère de notre planète, cette masse ne va pas changer⁴. La deuxième équation représente le bilan de la quantité de mouvement du fluide. Ce dernier découle directement de la mécanique de Newton. Enfin, la dernière équation représente ici le bilan énergétique du fluide. Elle découle directement de l'équation de la chaleur que nous avons vue dans le chapitre précédent.

Lorenz avait pour but de comprendre le mécanisme derrière le déplacement des masses d'air plutôt que de prévoir précisément le temps. Il a donc réduit son problème au maximum. Au lieu de considérer l'atmosphère en sa totalité, il s'est plutôt intéressé à une seule cellule de convection. Son problème était donc réduit à 2 dimensions. Ensuite, il a commencé ses calculs. Nous n'allons pas les développer ici mais pour ceux qui sont intéressés, vous pouvez les retrouver en annexe⁵. Notre

3. Titre de la conférence de Lorenz pour exposer sa nouvelle théorie.

4. Nous supposons ici qu'il n'y a pas d'échange de matière avec le sol. Dans la réalité, il y a bien un échange de matière par exemple lors de l'évaporation de l'eau donnant les nuages.

5. Voir Annexe : Equations de Lorenz

mathématicien a donc réduit son problème au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = Pr (y(t) - x(t)) \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} = \frac{Ra}{Ra_c} . x(t) - y(t) - x(t) . z(t) \\ \frac{\partial z(t)}{\partial t} = x(t) . y(t) - \beta . z(t) \end{cases} \quad (8)$$

Dans notre équation, nous avons donc :

- Pr : Le nombre de Prandtl, c'est un nombre sans dimension qui représente le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique du fluide.
- Ra : Le nombre de Rayleigh, c'est un nombre sans dimension qui représente le transfert thermique au sein d'un fluide.
- Ra_c : Nombre de Rayleigh critique.
- β : Paramètre réel.

L'utilisation de ces équations nous oblige à travailler dans un espace qui n'est pas forcément bien connu : L'espace des phases. En mécanique analytique, nous utilisons cet espace qui a comme avantage de permettre d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système mécanique. C'est ici que nous allons réaliser de nouveau l'expérience de Lorenz. Pour cela, nous avons du utiliser la méthode de Runge-Kutta⁶ pour développer ce système.

Revenons au jour de la découverte de Lorenz. Selon la légende, ce fût l'envie de café frais qui fit découvrir à Lorenz l'une des plus importante loi de la mécanique du Chaos : La sensibilité aux conditions initiales. En effet, notre mathématicien passait pas mal de temps à utiliser l'ordinateur à sa disposition (un Royal McBee LGP-300) et sa méthode consistait à rentrer les paramètres de son système (8) avec une précision au millionième (6 chiffres après la virgule) et de vérifier ses résultats en effectuant deux fois ce calcul. L'ordinateur lui donnait alors une colonne de chiffre qui lui restait à étudier. Mais un jour pas comme un autre, une forte envie de café (probablement dû à une forte déshydratation à cause de la chaleur produite par l'ordinateur) décida Lorenz à accélérer sa manœuvre. Il entra donc ses paramètres avec une précision moindre (3 chiffres après la virgule) et partit chercher son café pendant que l'ordinateur commençait ses calculs. Et la, ce fût le choc ! Vous pouvez visualiser l'observation de Lorenz sur le graphique ci-dessous :

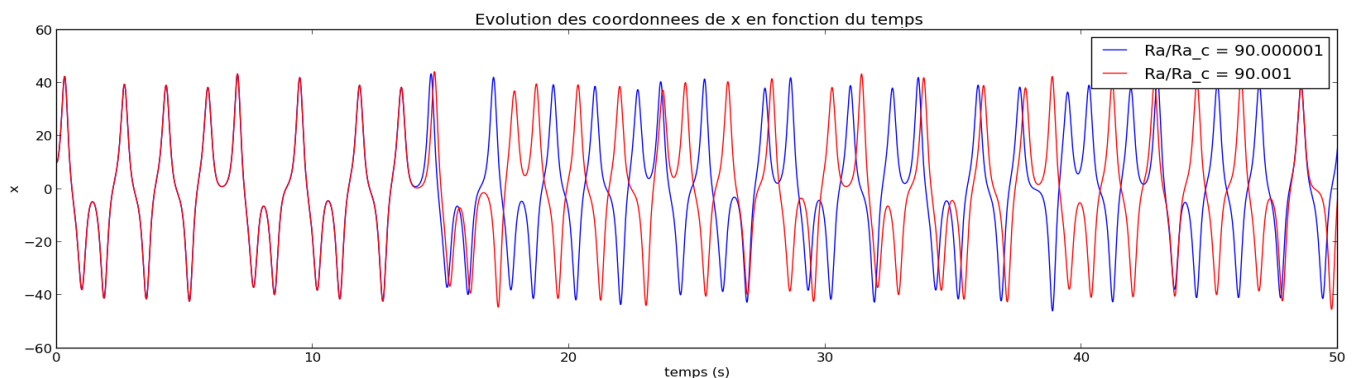


FIGURE 2 – Nous avons pris les coordonnées de départ : $x = 10.0$, $y = 11.0$, $z = 20.0$, $Pr = 10.0$, $\beta = 6.666$ et nous avons laissé $\frac{Ra}{Ra_c}$ variable.

Comme vous pouvez le voir, les deux courbes suivent une trajectoire confondue au début. Cependant, au bout de quelques instant, les deux courbes ont un profil légèrement différent et finissent par

6. Voir Annexe : Méthode de Runge-Kutta

ne plus être synchronisées. C'est ici la naissance de la mécanique Chaotique. Le comportement de notre cellule de convection ne doit rien au hasard mais à une forte sensibilité aux conditions initiales. La question posée par Lorenz pour présenter ses résultats était "Est ce qu'un mouvement aussi infime que le battement d'aile d'un papillon peut amener à la formation d'un phénomène aussi important qu'un ouragan?" La réponse est "Non", évidemment mais lorsque Lorenz a lancé sa simulation, une très petite différence entre les données d'entrée pouvait faire la différence entre un temps ensoleillé et une tornade dans la région où il faisait ses prédictions.

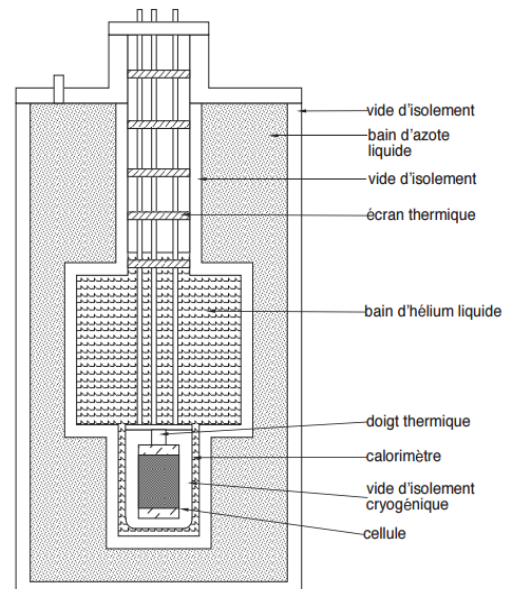
L'expérience de Rayleigh-Bénard

Cette expérience a pour but d'observer les cellules de convection dans un fluide. Le principe est simple, le dispositif est constitué de deux plaques entre lesquels nous allons ajouter le fluide que nous voulons observer. Les deux plaques sont maintenues à des températures constantes, celle du haut étant à une température plus faible que celle du bas pour essayer de reproduire les conditions que nous pouvons trouver dans l'atmosphère. Cette différence de température va avoir pour conséquence la formation de cellules de convection dans le fluide que nous allons observer.

L'expérience que nous allons voir porte le nom de deux grandes figures de la science. Le premier est John William Strutt Rayleigh. Ce mathématicien anglais a vécu au XIXème siècle et sa plus grande œuvre reste la loi de Rayleigh qui nous donne la probabilité de présence d'une particule à un endroit en fonction du nombre de pas d'une marche aléatoire.

Le second scientifique dont le nom est cité n'est autre que Henri Bénard. Ce physicien français du XIXème siècle est à l'origine des cellules que nous allons utiliser dans notre expérience. Sa thèse, intitulée "*Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection en régime permanent*", nous a amené une nouvelle façon de regarder le phénomène de convection.

Pour avoir le moins de perturbations possible, le dispositif ci-contre est généralement utilisé. La cellule est alors complètement coupée du monde extérieur. Ce dispositif nous permet alors de faire varier les températures des plaques supérieure et inférieure de manière très précise. Les plaques de la cellule sont en cuivre pour avoir une meilleure homogénéité des températures le long des plaques. Ces plaques font 10cm de diamètre et la cellule a une hauteur de 20cm. Lors d'une expérience en condition réelle, nous devons respecter les conditions de Boussinesq qui veut que la différence de température entre les deux plaques ne soit pas trop élevée⁷. Cette limite est importante car dans notre système de Lorenz (8), nous avons plusieurs coefficients : Pr , Ra et β . Le nombre de Prandtl est caractéristique du fluide utilisé, β est considéré comme fixe et dépend en grande partie de la hauteur de la cellule et nous prenons généralement le nombre de Rayleigh comme paramètre de contrôle, c'est à dire que nous voulons faire varier ce paramètre pour observer les phénomènes.



$$Pr = \frac{\nu}{K} \quad \frac{Ra}{Ra_c} = \frac{g \cdot \alpha \cdot h^3 \cdot \Delta T}{K \cdot \nu \cdot Ra_c} \quad \beta = \frac{4}{1+h^2} \quad (9)$$

Nous pouvons voir que si nous voulons avoir une grande variation de notre paramètre $\frac{Ra}{Ra_c}$, nous

7. Voir Annexe : Equations de Lorenz

sommes contraint à faire varier les propriétés du fluide, c'est à dire : α , K et ν qui dépendent de la température moyenne et de la pression du fluide. Nous n'avons dans ce mémoire pas développé l'expérience mais nous avons les outils informatiques qui nous permettent de faire varier ce paramètre et d'observer les résultats. Nous n'avons pas ici la prétention de vous présenter ce qui se passe réellement dans le fluide mais de vous donner une approche des phénomènes qui nous intéressent. Prévoir la météo est une chose extrêmement complexe et nous préférons vous exposer les résultats que nous pouvons avoir en modélisant le système Lorenz. Nous voulons par contre vous montrer comment les approximations de ce système peuvent mener à des erreurs si nous ne considérons pas les approximations utilisées par Lorenz dans sa démonstration.

Néanmoins, cette expérience a pu nous démontrer expérimentalement le système de Lorenz.

Analyse du système de Lorenz

Nous partons donc du système de Lorenz (8) que nous allons écrire comme suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Pr(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (10)$$

Ici, nous avons donc les coordonnées dans l'espace des phases tridimensionnel : x , y , z et les paramètres Pr et β que nous considérerons comme fixés respectivement à 10 et 8/3. Il nous reste donc notre paramètre de contrôle R , celui-ci est strictement positif et est proportionnel à la différence de température aux extrémités du fluide. Pour trouver les points d'équilibre, nous allons déjà vérifier les points où $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Nous pouvons déjà voir que nous allons avoir un point d'équilibre qui se trouve à l'origine (0, 0, 0). Cependant, pour $r > 1$, nous allons voir apparaître deux autres points d'équilibre :

- Le point de coordonnées : $(\sqrt{\beta(R-1)}, \sqrt{\beta(R-1)}, R-1)$
- Le point de coordonnées : $(-\sqrt{\beta(R-1)}, -\sqrt{\beta(R-1)}, R-1)$

Nous pouvons également simplifier le système (10) avec des matrices comme suivant :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -Pr & Pr & 0 \\ R-z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Où la matrice est appelée "Matrice Jacobienne" et qui va nous permettre de trouver les points d'équilibre de notre système. Les valeurs propre de cette matrice sont les racines du polynôme caractéristique : $\lambda^3 + (Pr + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(Pr + R)\lambda + 2.Pr.\beta(R-1) = 0$. Selon les valeurs de R , nous pouvons alors nous retrouver avec 3 racines réelles démontrant la stabilité du système ou bien une racine réelle et deux racines complexes qui vont déterminer l'instabilité du système. Nous pouvons alors rechercher la valeur de R critique pour laquelle notre équilibre va être rompu. En remplaçant alors λ par $i\omega$, on obtient alors les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} -\omega^2(Pr + \beta + 1) + 2.Pr.\beta(R-1) &= 0 \\ -i\omega^3 + i\omega.b(Pr + R) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Ce qui nous donne notre R critique :

$$R_c = \frac{Pr(Pr + \beta + 3)}{Pr - \beta - 1} \quad (13)$$

Dans notre cas, $R_c \simeq 24,73$, c'est à dire que notre système va devenir chaotique lorsque R va dépasser cette valeur. Lorsque nous modélisons ce système dans l'espace des phases, nous avons apparition d'une structure fractale que nous appelons "Attracteur de Lorenz". C'est cette construction mathématique qui a probablement donné l'idée du papillon à Lorenz pour illustrer sa mécanique Chaotique lors de sa conférence de 1963!

Lorsque notre système n'est pas chaotique, nous avons la formation d'un seul attracteur, cependant, lorsque R dépasse la valeur R_c , notre papillon déploie ses ailes pour nous inviter dans le monde du Chaos! Nous pouvons alors voir la présence d'un deuxième attracteur venant perturber la trajectoire de notre système qui rester à naviguer entre les deux puits de gravité de ces deux attracteurs. On qualifie également cette figure "d'attracteur étrange" car les trajectoires ne se coupent pas et semblent évoluer au hasard.

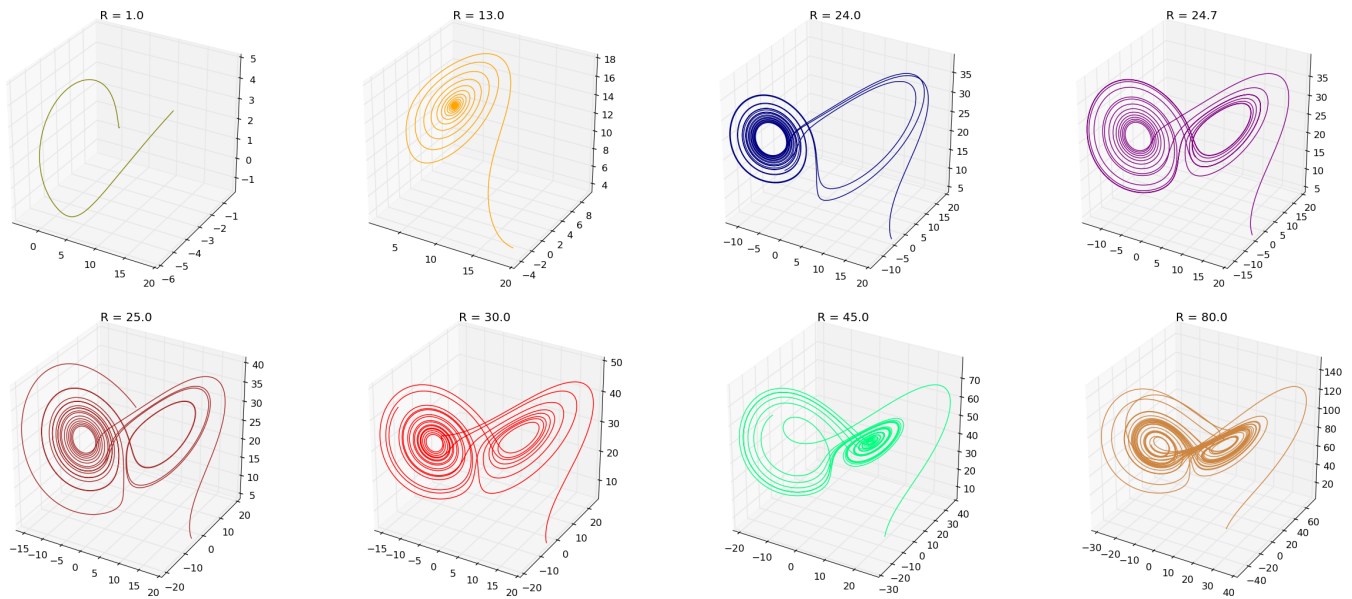


FIGURE 3 – Modélisation du système de Lorenz en faisant varier R .

En observant ces figures, on peut se rendre compte que le profil chaotique se dessine un peu avant notre valeur calculée. En effet, notre papillon déploie ses ailes un peu avant $R = 24$. Cependant notre approche par le calcul est relativement fiable car notre attracteur étrange n'est pas encore bien affirmé alors qu'à $R = R_c$, notre attracteur se révèle dans toute sa splendeur. Pour notre modélisation, nous avons pris le point de départ de coordonnées $(10.0, 5.0, 5.0)$ avec un pas de temps $\delta t = 0.001s$ et nous avons incrémenté notre calcul 50 000 fois en utilisant la méthode de Runge-Kutta⁸.

Nous allons maintenant nous intéresser aux variations de z en fonction du temps. Nous pouvons voir que cette variation n'est pas constante en fonction du temps. Cela est logique car nous avons pris une valeur de $R = 25$ pour nous mettre dans le cas d'un attracteur étrange. Nous avons donc l'évolution dans la figure (4). Ici, nous allons créer ce que l'on appelle la carte de notre attracteur ("Lorenz Map"). Pour cela, nous allons prendre chaque maximum ($Z_{n_{max}}$) et le comparer au maximum suivant ($Z_{n+1_{max}}$) dans un graphique de la forme $Z_{n+1_{max}} = f(Z_{n_{max}})$. Puis nous allons faire apparaître sur ce même graphique la fonction affine $Z_{n+1_{max}} = Z_{n_{max}}$. Bien entendu, pour avoir une bonne résolution de notre "carte", il est conseillé de faire beaucoup d'itérations.

Nous pouvons observer sur la figure (4) que lorsque nous sommes dans un régime non chaotique, l'allure de notre nuage de point semble reprendre l'allure de notre courbe $Z_{n+1_{max}} = Z_{n_{max}}$, alors

8. Voir Annexe : Méthode de Runge-Kutta

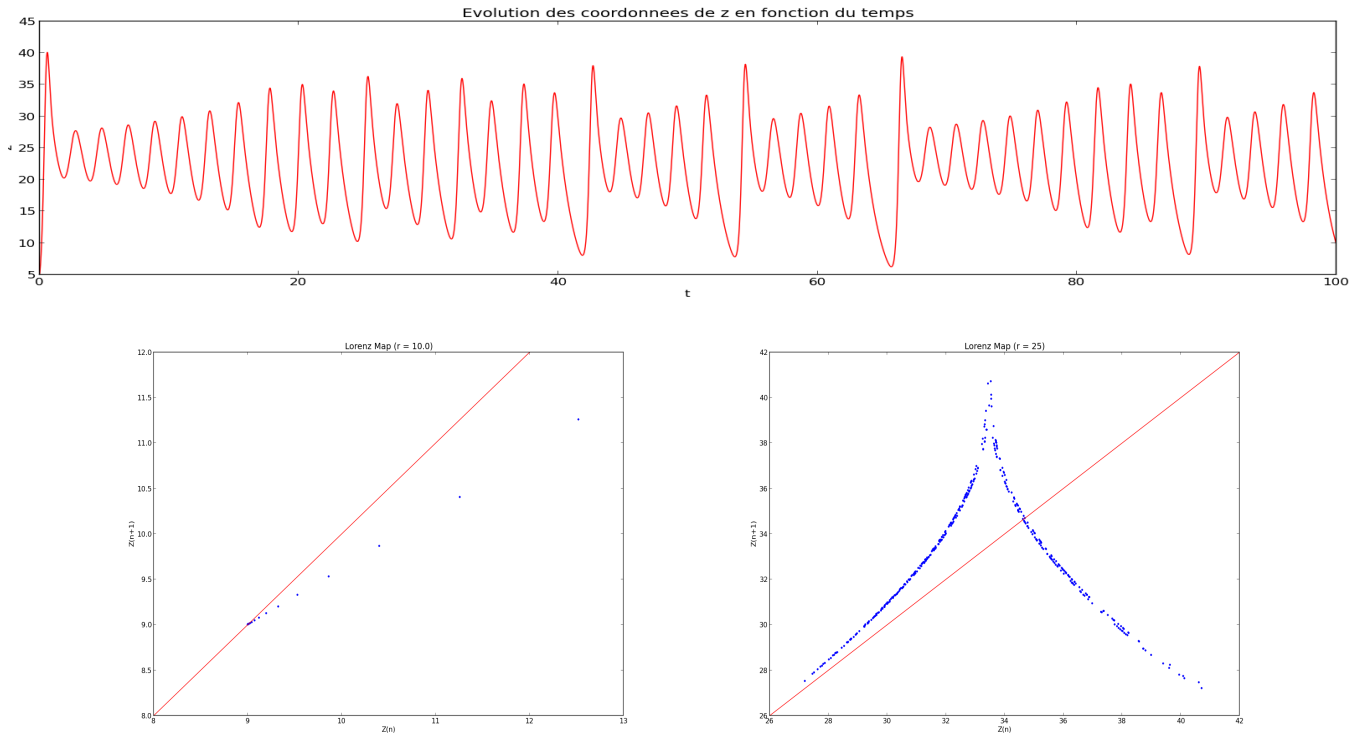


FIGURE 4 – Lorenz Map

que lorsque nous sommes dans un régime chaotique, notre nuage de point donne une forme qui ne semble pas du tout chaotique ! Bien au contraire, la forme que notre nuage de point nous donne peut très bien être approximé par une équation ! En fait, ce travail n'est qu'un départ pour pouvoir vous montrer la création d'un diagramme de bifurcation.

Pour former un diagramme de bifurcation, c'est plutôt simple, même si nous allons devoir faire un nombre de calculs hallucinant ! Dans la pratique, il faut former sur notre carte de Lorenz une sorte de toile d'araignée ! Nous allons commencer à partir d'un point sur l'axe $z_{n_{max}}$ ayant une valeur A , puis nous allons faire une droite jusqu'à ce quelle atteigne notre figure. Nous avons donc un point de coordonnées (A, B) où B est la valeur du point sur l'axe $z_{n+1_{max}}$. Nous allons alors projeter ce point verticalement sur notre fonction affine ce qui vas nous donner un point de coordonnées (B, B) . Puis nous allons projeter à nouveau ce point cette fois ci horizontalement sur notre figure... Vous pouvez avoir une visualisation de ce procédé sur la figure (5).

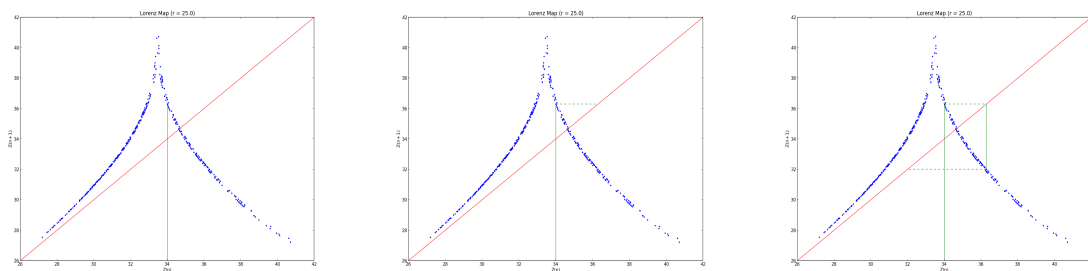


FIGURE 5 – Lorenz Web construction

Avec cette technique, nous pouvons alors tracer notre diagramme de bifurcation. En effet, lorsque

nous avons un régime non chaotique, notre "toile" se stabilise rapidement vers une ou deux valeurs. Cependant, plus nous augmentons notre R , plus notre régime devient chaotique et notre toile ne se stabilise qu'au bout de très nombreuses incrémentations (voir ne se stabilise pas du tout). Nous pouvons voir un exemple sur la figure (6). La difficulté de cette opération est que nous devons réaliser cette toile pour chaque valeur de R pour créer notre diagramme, mais vous pouvez observer le résultat sur la figure (7).

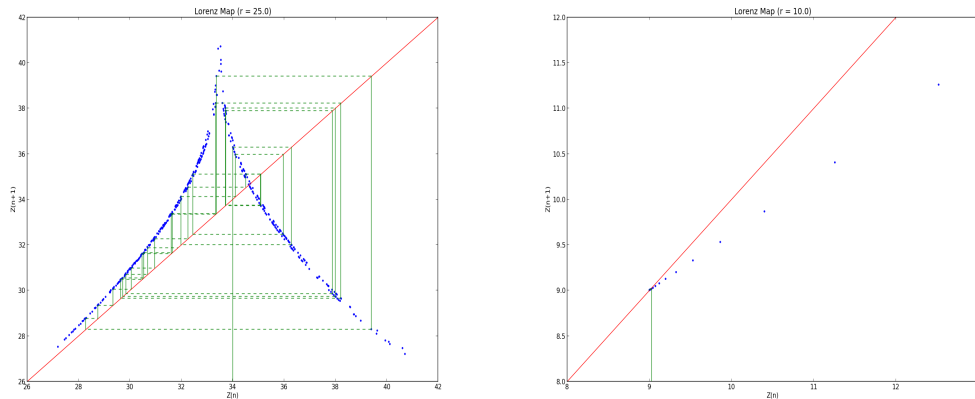


FIGURE 6 – Lorenz Web

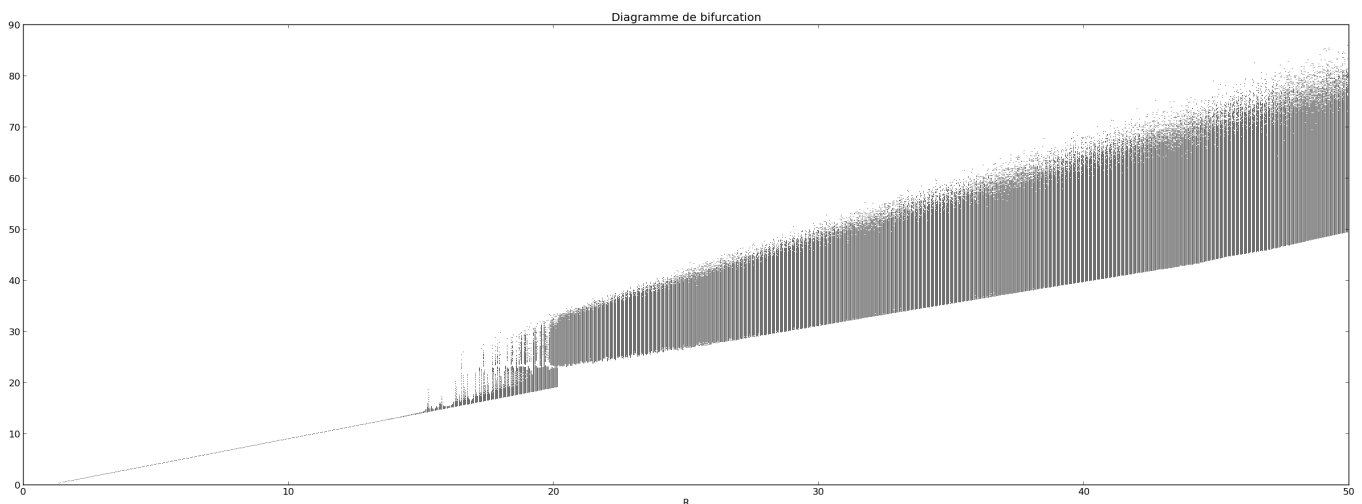


FIGURE 7 – Diagramme de bifurcation

Lorsque nous étudions ce diagramme, nous pouvons remarquer que le caractère chaotique de ce système se retrouve déjà lorsque $R \simeq 20$. Cela peut être aperçu lorsque nous étudions les attracteurs formés. En effet, lorsque $R \in (20, 24)$, notre attracteur met du temps pour se stabiliser. Nous avons un nuage de points autour du point d'équilibre. Cependant, Nous pouvons voir que le comportement chaotique arrive au fur et à mesure. Avec ces résultats, nous pouvons dire que notre régime va être stable jusqu'au point que nous avons réussi à calculer avec nos matrices. Après, la caractéristique chaotique de notre système va rendre impossible les prévisions à long terme. C'est comme lorsque vous écoutez les prévisions de la météo, vous pouvez voir les indices de confiance qui diminuent pour les prévisions à long terme.

L'héritage de Lorenz

Aujourd'hui, les attracteurs étranges de Lorenz ont ouvert la voie à une nouvelle approche de l'étude des systèmes dynamiques. Des systèmes analogues ont été développés dans d'autres disciplines comme l'économie, l'astronomie, la chimie ou encore l'électronique.

Par exemple, nous pouvons retrouver le système de Rössler qui est très utilisé dans les modélisations d'équilibre dans les réactions chimiques. On fixera généralement α et β en utilisant γ comme paramètre de contrôle.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + \alpha y \\ \dot{z} = \beta + z(x - \gamma) \end{cases} \quad (14)$$

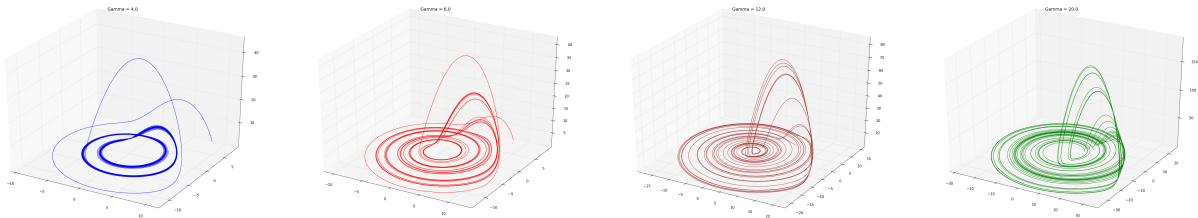
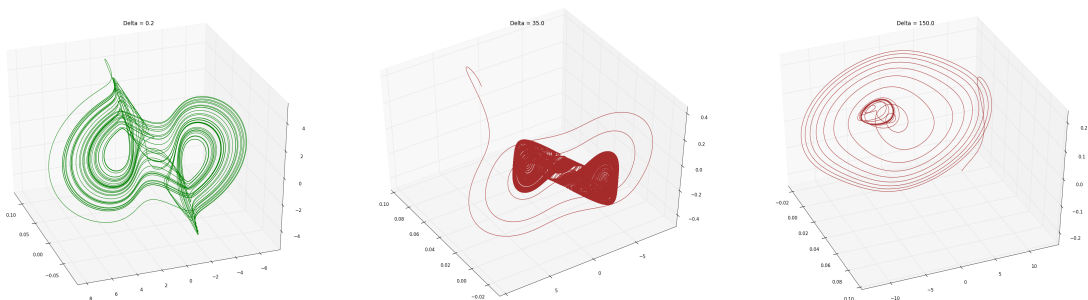


FIGURE 8 – Attracteur étrange de Rössler

De nombreux modèles chaotiques ont également été proposés en économie, souvent focalisés sur la macroéconomie pour permettre de prévoir les cycles de croissance et de régression. Ici, nous allons prendre comme paramètre de contrôle δ .

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha y + \beta x(\gamma - y^2) \\ \dot{y} = -x + \delta z \\ \dot{z} = \epsilon x - \eta y \end{cases} \quad (15)$$



C'est ici qu'on peut voir la force de cette nouvelle mécanique, elle peut être transposée dans tout les domaines et elle peut évoluer selon les besoins des différentes personnes qui l'utilise. On se sert de ces mystérieux attracteurs aussi bien pour savoir le temps qu'il fera demain que pour faire des prédictions économiques en passant par la chimie et l'électronique. Une des grandes réussites de cette mécanique a été de pouvoir apporter des réponses à des problèmes qui n'avaient aucune solution dans

le domaine des mathématiques analytiques. Nous allons voir dans notre prochaine partie comment cette nouvelle manière de penser nous a permis de résoudre un problème qu'un certain mathématicien Français avait démontré comme irrésolvable. Un certain Henri Poincaré.

Le problème des N corps

La théorie de la gravitation

Après nous être intéressé aux phénomènes thermiques, nous allons plonger notre regard dans les étoiles. Car cette théorie nous a aidé à modéliser un des plus grands casse-tête de l'histoire : Le problème à n corps.

Le premier à avoir développé une théorie permettant de décrire la théorie de la gravitation est Isaac Newton. Il est parvenu à décrire mathématiquement le mouvement de deux corps massifs l'un par rapport à l'autre. Ces calculs ont permis de se rapprocher des travaux de Johannes Kepler, mathématicien à l'origine des 3 lois de l'astronomie⁹. Mais voilà, lorsque nous voulions déterminer l'orbite de la Terre autour du Soleil, c'était parfait ! (Les autres planètes étaient trop éloignées donc on pouvait négliger leur présence !) Lorsque nous voulions déterminer l'orbite de la Lune, ce fut un plaisir de se servir de cet outil ! Mais Une petite tâche viens frapper cette théorie. Comment faire lorsque nous étudions plus de 2 corps ? Et bien la formule de Newton pourtant si simple se transforme en problème des plus complexe. Le premier à se jeter à l'eau est Mr Louis Lagrange ! Cependant, il finit par devoir négliger une des masses devant les deux autres pour pouvoir arriver à un résultat. Un résultat d'un problème à 3 corps ! On est loin de pouvoir prédire les hypothétiques marées d'un planète comme Mars avec ses deux satellites. On est encore plus loin de pouvoir modéliser notre système Solaire qui nous donnerait un problème à 9 corps (8 planètes plus le Soleil). C'est donc en 1887 que le roi Oscar II de Suède et de Norvège organise un concours visant à récompenser une grande découverte en Mathématique. Et le problème des n corps est l'un des sujets proposés. C'est ici que Henri Poincaré nous prouve ce problème comme insoluble et nous apporte la première définition du Chaos.

Aujourd'hui, les secrets de la gravitation nous sont développés par le théorie de Mr Albert Einstein. Cependant, nous allons plutôt ici utiliser les équations de Newton plutôt que celles données par la relativité générale. Cela nous permettra non seulement d'éviter de compliquer les calculs mais également de raccourcir notre développement. De plus, les équations de Newton décrivent très bien les phénomènes qui se passent dans notre système solaire et sont encore utilisés pour mettre en orbite nos satellites. Il est d'ailleurs ironique de savoir que la théorie de la relativité n'est utilisée dans l'aéronautique que pour régler les horloges de nos satellites GPS.

Pour cela, nous allons revenir sur plus de 300 ans d'astronomie. Et notre premier arrêt se fera chez Mr Isaac Newton. Vous connaissez tous cette personne qui, selon la légende, a vue dans la chute d'une pomme l'une des plus importante loi de la mécanique moderne : la Gravitation. Ce dernier, dans son article "De motu corporum in gyrum" (*Mouvement des corps en rotation*), va décrire la loi

9.

Loi des orbites : Les planètes du système solaire décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Loi des Aires : Si nous prenons le point E (étoile) et le point P (planète), alors pendant un temps donné, l'aire parcouru par le segment EP sera toujours la même.

Loi des périodes : Ou loi d'harmonie de Kepler, le cube de la distance moyenne d'une planète au Soleil est proportionnel au carré de la période de révolution sidérale.

unissant ainsi la mécanique terrestre et la mécanique céleste par l'expression :

$$F_{a,b} = g \frac{m_a m_b}{d^2} \quad (16)$$

Où :

- $F_{a,b}$ et la force exercée par l'objet a sur l'objet b (qui est égal à la force exercée par l'objet b sur l'objet a).
- g est la constante de gravitation ($\simeq 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$).
- m_a et m_b sont respectivement les masses des objets a et b .
- d est la distance qui sépare les deux masses.

Newton a bien conscience que cette synthèse remarquable contient une difficulté. Si la gravité est universelle, alors les planètes devraient s'attirer entre elles et cela devrait créer des perturbations ! Mais étant très croyant, il était certain que Dieu veillait à la stabilité du système car comme il le disait souvent : "*He is the God of order and not of confusion*" (Il est le Dieu de l'ordre et non de la confusion).

Au XVIII^e siècle, nous allons rencontrer un nouveau physicien qui a voulu se lancer dans ces observations, Mr Pierre-Simon Laplace. Celui-ci ne pouvait plus venir à bout des équations de Newton et décrire les mouvements planétaires sans avoir à faire intervenir la main de Dieu. Il a donc créé une méthode de développement en série pour calculer les orbites réelles des planètes. Le résultat de ses recherches démontré que Saturne et Jupiter se rapprochent puis s'éloignent, répétant ce cycle tous les 900 ans. Cependant, le système solaire reste toujours un système stable et les orbites des astres sont toujours considérées comme stables.

C'est en 1890 que Henri Poincaré va porter le coup de grâce à l'idée de stabilité des astres. Dans sa publication, "*Sur le problème des trois corps et les équations de la mécanique*", il va commencer à critiquer la stabilité dans le système solaire en démontrant l'impossibilité de résoudre les équations de la gravitation avec plus de deux corps. Ce papier va faire une grande impression car à l'époque, il y a seulement deux courants de pensée ! Le premier est celui expliqué par l'Eglise et qui dit que la Terre et le Soleil ont été créés par Dieu. Le second, qui est souvent présenté par les physiciens, est que la Terre, le Soleil et même l'Univers est fixe ! Qu'il a toujours existé et qu'il existera toujours ! C'est là que la solution de Poincaré va frapper. Si l'univers a toujours existé, alors les orbites devraient être stables sinon les planètes auraient plongé dans le Soleil depuis longtemps ! Mais Poincaré n'a pas voulu se perdre dans ces questions plus philosophiques que mécaniques et il passa les années suivantes à essayer de comprendre la complexité de ce système.

Pour développer son étude, il procéda par étapes :

- Lorsque nous utilisons les équations de la mécanique pour un problème à trois corps, les solutions ne sont ni intégrables ni linéaires. Les solutions de Laplace ne peuvent donc pas être utilisables pour des prévisions à long terme.
- Etant donné la nature du problème, Poincaré va chercher des solutions dans l'espace des phases qui va lui permettre de modéliser son problème à l'aide de 6 dimensions : les trois dimensions d'espaces (x, y, z) et trois dimensions de vitesses (v_x, v_y, v_z). Le problème est qu'il est pratiquement impossible de visualiser plus de 3 dimensions pour un humain normal. Notre physicien va donc procéder à des coupes pour pouvoir mieux analyser les mouvements.
- Lors de l'analyse de ses résultats, il va pouvoir déduire que bien qu'il y ait une certaine période dans les résultats qu'il a obtenus, il y a une part de chaos.

Ces résultats ont été remarquables pour son époque car Poincaré n'avait pas accès à un ordinateur et n'avait qu'une feuille et un crayon comme outil de calcul ou pour dessiner. Nous allons ici nous consacrer au problème à plusieurs corps dont Poincaré avait déclaré l'impossibilité. Nous allons voir comment nous avons transformé les équations pour qu'elles servent notre but.

Problème à N -corps

Pour les modélisations à N -corps, il n'existe pas de solution rigoureusement mathématique. Les scientifiques se sont alors penchés sur l'extraordinaire capacité de calcul des ordinateurs et le résultat reste très simple. Nous partons tout simplement de la loi de la gravité suivante :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = g \sum_{j=1; j \neq i}^N \left(\frac{m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \right) \quad (17)$$

Avec :

- m_i, m_j sont les masses des particules
- $\vec{r}_i, \vec{r}_j$ sont les vecteurs position des particules
- $\ddot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_j$ sont les dérivées secondes des vecteurs position (assimilable à l'accélération)
- g est la constante de gravitation.

La réduction du problème est simple. Nous allons commencer par prendre un écart de temps que nous allons noter δt . Pendant cet écart de temps, nous allons calculer les déplacements effectués par nos corps en utilisant la formule (17). Nous allons ici décomposer notre équation pour corps que nous allons appeler a, b et c . Nous avons alors : le système suivant :

$$\begin{cases} m_a \ddot{\vec{r}}_a = g \left(\frac{m_a m_b (\vec{r}_a - \vec{r}_b)}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3} + \frac{m_a m_c (\vec{r}_a - \vec{r}_c)}{|\vec{r}_a - \vec{r}_c|^3} \right) \\ m_b \ddot{\vec{r}}_b = g \left(\frac{m_b m_a (\vec{r}_b - \vec{r}_a)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|^3} + \frac{m_b m_c (\vec{r}_b - \vec{r}_c)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_c|^3} \right) \\ m_c \ddot{\vec{r}}_c = g \left(\frac{m_c m_a (\vec{r}_c - \vec{r}_a)}{|\vec{r}_c - \vec{r}_a|^3} + \frac{m_c m_b (\vec{r}_c - \vec{r}_b)}{|\vec{r}_c - \vec{r}_b|^3} \right) \end{cases} \quad (18)$$

Nous assumons que dans notre écart de temps δt , les déplacements de nos points sont assimilables à une ligne droite, nous avons donc $\ddot{\vec{r}}_i$ qui est indépendant du temps. Nous pouvons alors en déduire le système suivant :

$$\begin{cases} \vec{r}_a = \int_0^{\delta t} \ddot{\vec{r}}_a dt^2 = \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_a \delta t^2 \\ \vec{r}_b = \int_0^{\delta t} \ddot{\vec{r}}_b dt^2 = \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_b \delta t^2 \\ \vec{r}_c = \int_0^{\delta t} \ddot{\vec{r}}_c dt^2 = \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_c \delta t^2 \end{cases} \quad (19)$$

Maintenant, assumons que nous voulions connaître le déplacement de ces particules, il nous suffit de réinjecter les résultat de l'équation (19) dans les équations (18) et de répéter cette démarche un grand nombre de fois. Nous sommes ici en face d'un problème d'un autre ordre, plus nous allons prendre un δt petit, plus notre simulation va être précise, mais plus le nombre de calculs va augmenter.

En informatique, nous nous intéressons aux nombre de calculs nécessaires pour faire les modélisations. Plus il y a de calculs, plus l'ordinateur va mettre de temps. Nous allons donc essayer de réduire ce nombre de calculs le plus possible, par exemple nous savons que $F_{i/j} = -F_{j/i}$ ce qui nous fait gagner une opération. Seulement, nous allons toujours avoir $\frac{1}{2}N(N-1)$ calculs ! Pour un problème à 3 corps comme nous venons de le voir, cela ne paraît pas forcément important... Mais qu'en est-il lorsque notre N tend vers de grand nombre ? Quand nous avons $N = 9$ (Soleil + planètes), nous avons 36 opérations à chaque pas de temps. Pour $N = 182$ (Soleil + planètes + satellites), nous avons 16 471 opérations ! Et si nous voulons modéliser les étoiles de notre galaxie (entre $2 \cdot 10^{11}$ et $4 \cdot 10^{11}$), cela ferait plus de $4 \cdot 10^{22}$ opérations !!! Il était impensable de faire autant de calculs ! De nombreux algorithmes ont été développés pour parer cette difficulté notamment l'algorithme de Barnes-Hut.

Les recherches sur les orbites des planètes du système solaire ont permis de découvrir que celles-ci avaient des mouvements chaotiques. Il est d'ailleurs impossible de prédire l'évolution des planètes au

delà de 100 millions d'années ! Je vous rassure, selon ces résultats, nous n'allons pas plonger dans le Soleil de sitôt, les prévisions montrent que l'orbite des planètes ne va pas changer drastiquement durant cette période. Cependant, ces recherches nous ont démontré que l'orbite de la Terre va être modifiée au cours du temps, elle va se rapprocher du Soleil puis s'éloigner...

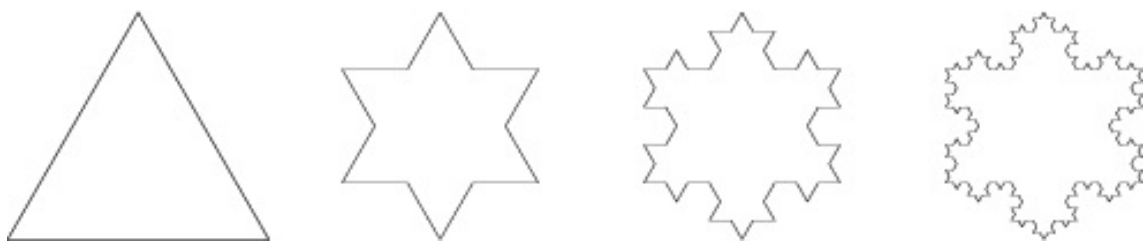
La géométrie de la nature

Une organisation chaotique

Comme nous l'avons déjà expliqué, les fractales ont été découvertes par Benoît Mandelbrot lorsqu'il étudiait les perturbations dans les lignes téléphoniques reliant les ordinateurs de la société IBM. Ces objets mathématiques ont permis de visualiser des phénomènes naturels ou parfois artificiels. Il faut savoir que Mandelbrot était réputé capable se représenter tout problème mathématique comme structure géométrique. Son œuvre peut donc être vue comme le moyen qu'il a trouvé pour nous montrer comment il voyait le monde des mathématiques.

Les fractales sont des objets dont la structure a une invariance lorsque nous changeons d'échelle, c'est à dire que si nous faisons un zoom sur un coté de notre figure, nous devrions arriver à un point où allons retrouver une image semblable à notre figure de départ. Pour une meilleur représentation, vous pouvez penser à la célèbre série de dessin animé "La Vie" où notre corps est peuplé de répliques de ce dernier ! Dans ce dessin animé, nous suivons souvent les globules rouges qui sont représentés comme de minuscules humains circulant dans nos artères. Mais à quoi ces objets nous servent-ils ? Il est bien connu que nous ne sommes pas constitués de microscopiques répliques de nous-même circulant dans notre corps pour en assurer le fonctionnement, alors quel est le rapport entre ces étranges figures et la nature ?

Et bien ce problème se retrouve à tous les niveaux de la nature ! Nous allons pour suivre prendre l'exemple de la biologie qui est l'une des formes d'organisation de la matière la plus complexe sur Terre et dans laquelle nous pouvons retrouver des exemples de fractales à tous les niveaux.



Nous allons commencer notre périple par l'ADN, élément de base de toute cellule et véritable plan des organismes. Cette molécule est considérée comme la plus longue molécule existant sur Terre. Imaginez que pour chacune de vos cellules (qui ont une taille d'environ 1/100 de mm, nous avons près de 2m d'ADN si nous mettons tout les brins bout à bout. Il y a ici une question qui mérite d'être posée, comment faire tenir une telle longueur dans une cellule aussi petite ? Et bien, tournons ici vers l'une des caractéristiques des fractales. Si nous les observons de près, nous pouvons nous rendre compte que ce sont des objets qui, bien qu'ayant une surface pouvant être calculée (prenons l'exemple du flocon de Kock, sa surface reste inférieure à celle du cercle circonscrit), ont un périmètre qui est infini ! Nous avons ici une réponse apportée par cette étrange géométrie à un problème bien concret. Mais allons un peu plus loin... Regardons comment est "plié" notre ADN, nous pouvons

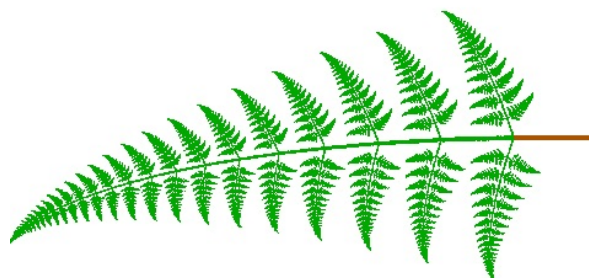
alors remarquer que ce dernier va former une spirale. Une partie de cette spirale va alors s'enrouler autour d'autres molécules formant une sorte de "boule", puis cette "boule" va être liée à d'autres "boules" correspondant à l'enroulement de l'ADN voisine. Nous avons ici une formation comparable à une décoration de Noël ! Mais nous devons ici ranger cette décoration dans nos chromosomes ! Cette décoration, appelée ici "nucléofilament" va alors former une spirale qui va se replier sur elle-même... pour finalement créer nos chromosomes¹⁰. Maintenant, que pensez vous de ce genre de répétition ?

- Assemblage d'atome (assimilable à des boules) en molécule linéaire.
- Arrangement de cette molécule en forme de spirale.
- Formation de "boules" suite à l'interaction entre l'ADN et d'autres molécules.
- Arrangement de cet ensemble sous forme de spirale.

Et oui, nous avons ici un remarquable exemple d'invariance d'échelle ! Du moins pendant un nombre limité de cycle... Mais l'étude des fractales a été déterminante dans l'étude de ce phénomène.

Maintenant, changeons d'échelle et regardons nos organes. Chaque cellule de notre corps a besoin de "carburant" pour fonctionner et rejette des "déchets". Le rôle d'apport et d'énergie et d'évacuation des déchets est assuré par le sang qui se doit donc de parcourir tout notre corps. Mais comment est organisé ce transport ? Nous pouvons le représenter simplement comme un réseau routier ! Nous avons des artères/veines (autoroute/routes nationales) ou le débit est important et qui conduit notre sang dans tout notre corps. Puis nous avons les artérioles/veinules (routes départementales), plus étroites et ayant un débit plus faible, celles-ci vont nous conduire vers les formations suivantes. Enfin, nous avons les capillaires, beaucoup plus étroits (rues, avenues...) et ayant un débit plus faible et permettant des échanges avec les cellules de notre organisme, celles-ci sont encore plus étroites. Dans ce schéma, nous retrouvons bien notre concept d'invariance d'échelle car bien que de plus en plus petite, cette structure garde une forme identique selon les différentes échelles. L'organisation de ce réseau est également fractal car nous avons ici une longueur de réseau équivalent au double de la circonférence de la Terre contenue dans un volume ne dépassant pas les 5% du volume de notre corps.

Mais cette disposition ne se retrouve pas uniquement chez l'homme ! Prenons l'exemple de la fougère. Il est intéressant de savoir que la fougère est une plante ayant gardé certaines spécificités appartenant à ces ancêtres préhistorique dont la disposition de ses feuilles. C'est à dire cette disposition est l'une des premières dispositions qui ait été viable dans le monde du vivant ! Il est étrange alors de remarquer le caractère fractale de ses feuilles ! En effet, si nous regardons bien la disposition des pennes ressemble à la disposition des feuilles qui ressemble à la disposition de la plante. Nous retrouvons bien ici notre invariance d'échelle.



10. Les chromosomes sont formés seulement à certaines étapes de la vie d'une cellule, principalement lors de la division cellulaire. Néanmoins, l'organisation générale de notre brin d'ADN dans une cellule qui ne se divise pas reste regroupé à la manière d'une spirale.

Mais alors pourquoi cette disposition est autant utilisée dans la nature ? Comment se fait-il que nous la retrouvions à tous les niveaux de celle-ci ? Et bien la réponse à cela est la simplicité d'organisation. Et cette facilité est très bien expliquée par le "jeu du chaos" mis au point par Michael Barnsley. Au début, celui-ci voulait créer une méthode simple et rapide de création de fractales en utilisant un polygone et un point initial choisi au hasard. Puis, avec un ordinateur, vous itérez ce problème un grand nombre de fois et une figure va commencer à émerger de cela. Reprenons ici notre fougère, nous savons que pour créer la forme de notre fougère, nous devons suivre le système suivant :

Pour commencer, demandons un nombre aléatoire compris entre 0.00 et 1.00 que nous allons appeler *Rand*.

$$\begin{cases} \text{Si } Rand < 0.02 & \Rightarrow & x_i = 50.0 & y_i = 0.27 * y_{i-1} \\ \text{Si } Rand < 0.17 & \Rightarrow & x_i = -0.139x_{i-1} + 0.263y_{i-1} + 57.0 & y_i = 0.246x_{i-1} + 0.244y_{i-1} - 8.28 \\ \text{Si } Rand < 0.3 & \Rightarrow & x_i = 0.17x_{i-1} - 0.215y_{i-1} + 40.8 & y_i = 0.222x_{i-1} + 0.176y_{i-1} + 20.539 \\ \text{Si } Rand \geq 0.3 & \Rightarrow & x_i = 0.781x_{i-1} + 0.034y_{i-1} + 10.75 & y_i = -0.032x_{i-1} + 0.739y_{i-1} + 62.1 \end{cases} \quad (20)$$

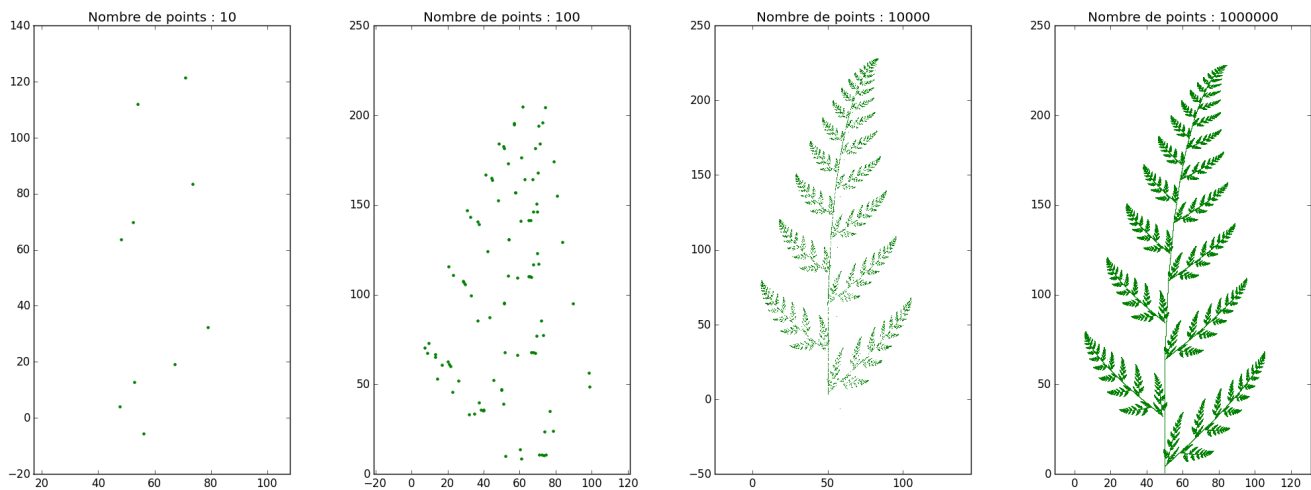


FIGURE 9 – Formation de la fougère de Barnsley

Au fur et à mesure des itérations, nous pouvons voir apparaître ce que l'on appelle "La fougère de Barnsley" (Figure (9)). Le dessin final fera d'ailleurs pleurer de jalousie les étudiants de biologie qui lors des travaux pratiques doivent patiemment dessiner les fougères qu'ils ont devant les yeux. Cela nous montre que l'information nécessaire pour "construire" ce modèle n'est pas énorme ! Il tient en fait sur 4 lignes ! Il n'en faut pas plus pour représenter la complexité apparente d'un être vivant !

Qu'est-ce que cela nous apprend ? Que la nature n'a pas besoin d'avoir un plan détaillé de l'organisation des êtres vivants, les mathématiques fractales montrent que pour développer les choses les plus complexes, nous n'avons seulement besoin que d'avancer d'un pas selon une règle. D'ailleurs, n'est-ce pas ce que chaque être vivant fait ? Il passe d'un organisme à N cellules à un organisme à $N + 1$ cellules à chaque instant !

La figure de la résolution polynomiale

Les ensembles de Julia et Fatou

Au début du XX^{ème}, nous allons suivre deux mathématiciens qui ont fait la même découverte malgré le fait qu'ils aient conduit leurs travaux de façon totalement indépendante. Le but qu'ils recherchaient était la résolution des polynômes complexes. Leurs travaux se tournent sur l'itération successive de ces polynômes. Par exemple, pour étudier le polynôme $P(z) = z^2 + c$ avec z un nombre complexe de la forme $z = a + ib$, ils utilisaient la formule $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Ici, nous prenons c , une valeur complexe quelconque fixe et z une valeur complexe arbitraire variable.

Nos mathématiciens remarquent alors que pour certaines valeurs de z , le résultat se maintient au fil des itérations alors que pour d'autres valeurs de z , les résultats tendent vers l'infini. En fait, si la valeur de $|z|$ dépasse la valeur de 2, alors le système tendra vers l'infini. Ce type de calcul est relativement simple bien que très long ce qui explique que nos mathématiciens s'arrêtaient au bout d'un nombre restreint d'itération. A l'époque, les ordinateurs n'existaient pas et la modélisation des résultats ne pouvait tout simplement pas se faire.

L'ensemble de Mandelbrot

Mandelbrot prit le relai dans cette discipline et prit le problème différemment. Pour la même formule $z_{n+1} = z_n^2 + c$, il prit un c variable et un z partant de la valeur $z = 0$. Alors qu'il y a plusieurs d'ensembles de Julia, il y a un seul ensemble de Mandelbrot correspondant à chaque formule. Le but de cette recherche est de déterminer les points pour lesquels le polynôme ne diverge pas.

Quel est l'intérêt de ces recherches ?

Comment imager notre problème

Que ce soit l'ensemble de Mandelbrot ou l'ensemble de Julia, nous allons utiliser la même méthode de résolution informatique. Pour créer l'image de notre problème, nous allons dans un premier temps délimiter notre espace. Imaginons une image avec une résolution de 5×5 pixels. Nous allons assigner la coordonnée complexe du pixel à notre variable complexe.

Coordonnées (-2, 2) $z = -2 + 2i$	Coordonnées (-1, 2) $z = -1 + 2i$	Coordonnées (0, 2) $z = 2i$	Coordonnées (1, 2) $z = 1 + 2i$	Coordonnées (2, 2) $z = 2 + 2i$
Coordonnées (-2, 1) $z = -2 + i$	Coordonnées (-1, 1) $z = -1 + i$	Coordonnées (0, 1) $z = i$	Coordonnées (1, 1) $z = 1 + i$	Coordonnées (2, 1) $z = 2 + i$
Coordonnées (-2, 0) $z = -2$	Coordonnées (-1, 0) $z = -1$	Coordonnées (0, 0) $z = 0$	Coordonnées (1, 0) $z = 1$	Coordonnées (2, 0) $z = 2$
Coordonnées (-2, -1) $z = -2 - i$	Coordonnées (-1, -1) $z = -1 - i$	Coordonnées (0, -1) $z = -i$	Coordonnées (1, -1) $z = 1 - i$	Coordonnées (2, -1) $z = 2 - i$
Coordonnées (-2, -2) $z = -2 - 2i$	Coordonnées (-1, -2) $z = -1 - 2i$	Coordonnées (0, -2) $z = -2i$	Coordonnées (1, -2) $z = 1 - 2i$	Coordonnées (2, -2) $z = 2 - 2i$

Ensuite, nous allons définir quel polynôme nous voulons étudier. Ici, nous allons prendre comme exemple le polynôme $P(z) = z^2 - c$ et nous allons prendre 2 exemples.

Dans un premier exemple, nous allons prendre comme coordonnée de départ (1, 1) qui nous donne le point $p_i = 1 + i$. Ensuite, nous itérons notre problème et observons l'évolution de $|z|$.

	Julia - Fatou		Mandelbrot	
On fixe	$c = 0.05 + 0.6i, z_0 = p_i = 1 + i$		$z_0 = 0, c = p_i = 1 + i$	
Itération n°1	$z_1 = (z_0)^2 + c = 0.05 + 2.6i$	$ z_1 = 2.6$	$z_1 = (z_0)^2 + c = 1 + i$	$ z_1 = 1.41$
Itération n°2	$z_2 = (z_1)^2 + c = -6.70 + 0.86i$	$ z_2 = 6.76$	$z_2 = (z_1)^2 + c = 1 + 3i$	$ z_2 = 3.16$
Itération n°3	$z_3 = (z_2)^2 + c = 44.30 - 10.94i$	$ z_3 = 45.63$	$z_3 = (z_2)^2 + c = -7 + 7i$	$ z_3 = 9.9$
Itération n°4	$z_4 = (z_3)^2 + c = 1843.01 - 968.43i$	$ z_4 = 2081.95$	$z_4 = (z_3)^2 + c = 1 - 97i$	$ z_4 = 97$

Dans ce premier développement, nous pouvons observer que la valeur de $|z|$ tend très rapidement vers l'infini.

Dans un second exemple, nous allons prendre comme coordonnée de départ $(-0.2, 0.2)$ qui nous donne le point $p_i = -0.2 + 0.2i$ et nous allons faire la même observation.

	Julia - Fatou		Mandelbrot	
On fixe	$c = 0.05 + 0.6i, z_0 = p_i = -0.2 + 0.2i$		$z_0 = 0, c = p_i = -0.2 + 0.2i$	
Itération n°1	$z_1 = (z_0)^2 + c = 0.05 + 0.52i$	$ z_1 = 0.52$	$z_1 = (z_0)^2 + c = -0.2 + 0.2i$	$ z_1 = 0.28$
Itération n°2	$z_2 = (z_1)^2 + c = -0.22 + 0.65i$	$ z_2 = 0.69$	$z_2 = (z_1)^2 + c = -0.2 + 0.12i$	$ z_2 = 0.23$
Itération n°3	$z_3 = (z_2)^2 + c = -0.32 + 0.32i$	$ z_3 = 0.46$	$z_3 = (z_2)^2 + c = -0.17 + 0.15i$	$ z_3 = 0.23$
Itération n°4	$z_4 = (z_3)^2 + c = 0.06 + 0.39i$	$ z_4 = 0.40$	$z_4 = (z_3)^2 + c = -0.19 + 0.15i$	$ z_4 = 0.24$
...	...	...	...	...
Itération n°10	$z_{10} = (z_9)^2 + c = -0.20 + 2.27i$	$ z_{10} = 0.34$	$z_{10} = (z_9)^2 + c = -0.19 + 0.15i$	$ z_{10} = 0.24$
...	...	...	...	...
Itération n°100	$z_{100} = (z_{99})^2 + c = -0.16 + 0.46i$	$ z_{100} = 0.49$	$z_{100} = (z_{99})^2 + c = -0.19 + 0.15i$	$ z_{100} = 0.24$
...	...	...	...	...
Itération n°1000	$z_{1000} = (z_{999})^2 + c = -0.15 + 0.47i$	$ z_{1000} = 0.49$	$z_{1000} = (z_{999})^2 + c = -0.19 + 0.15i$	$ z_{1000} = 0.24$

Dans ce second exemple, nous pouvons voir que nos suites se stabilisent à une certaine valeur, on dit que la suite reste bornée et que la valeur complexe représentée par le point p_i définit notre ensemble. Nous savons alors que le nombre $z = -0.2 + 0.2i$ appartient à l'ensemble de Julia-Fatou étudié et appartient à l'ensemble de mandelbrot du polynôme étudié.

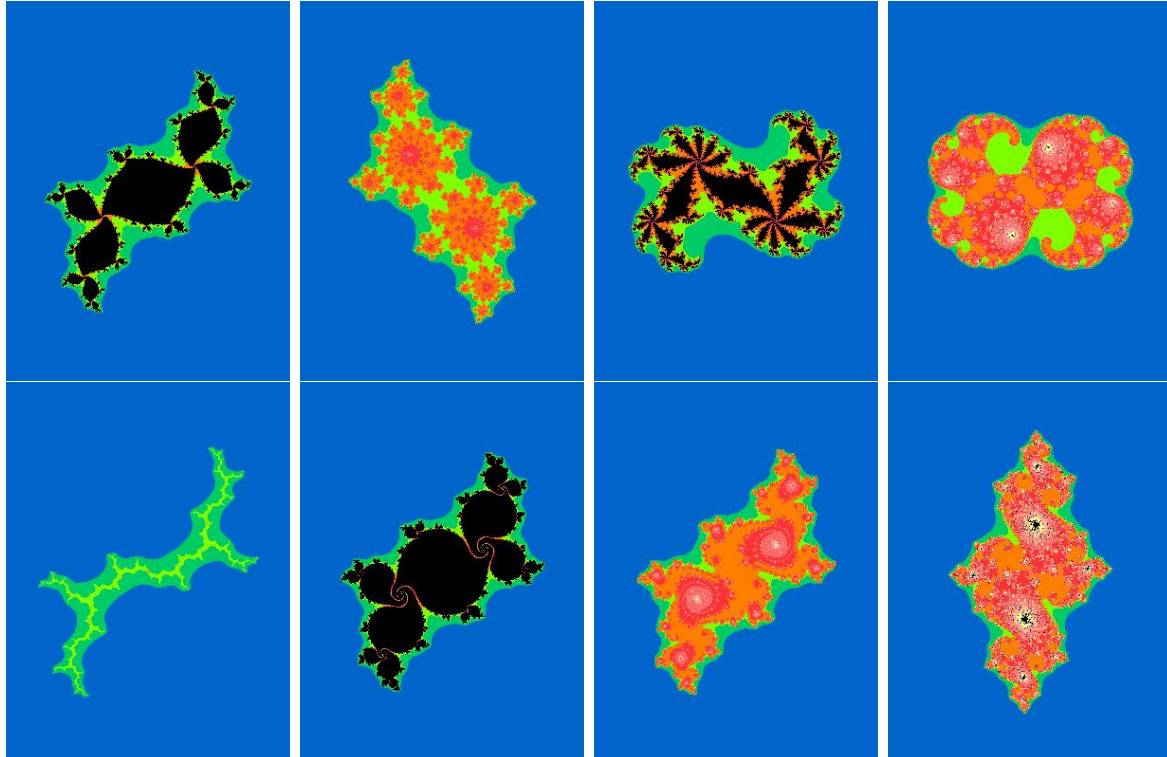


FIGURE 10 – Ensemble de Julia-Fatou du polynôme $P(z) = z^2 + c$ - De gauche à droite, de haut en bas : $c = -0.0952 + 0.735i$, $c = -0.414 - 0.612i$, $c = 0.382 + 0.147i$, $c = 0.284 - 0.0122i$, $c = i$, $c = -0.11 + 0.6557i$, $c = -0.194 + 0.6557i$, $c = -0.74543 + 0.11301i$

Grâce à cette méthode, nous allons pouvoir créer nos fractales. Nous allons ici colorier les points dont le résultat ne tend pas vers l'infini en noir pour les démarquer comme appartenant à nos espaces et nous allons utiliser un dégradé du bleu vers le rouge pour différencier le nombre d'itérations nécessaires pour que notre résultat tende vers l'infini.

Dans les figures (10) (11), nous avons simulé plusieurs ensembles de Julia-Fatou pour 4 points que nous avons pris au hasard. Ces images vous démontrent la multiplicité des ensembles de Julia-Fatou que nous pouvons générer pour un même polynôme.

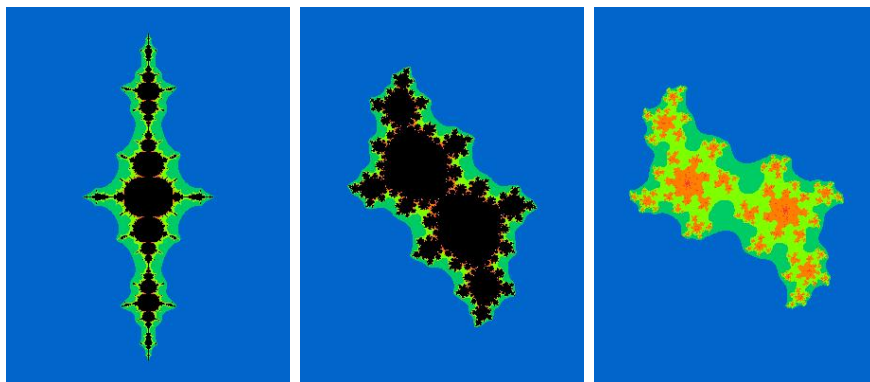


FIGURE 11 – Ensemble de Julia-Fatou du polynôme $P(z) = z^2 + c$ - De gauche à droite : $c = -1.25$, $c = -0.39054 - 0.58679i$, $c = 0.11031 - 0.67037i$

Dans la figure (12), nous avons simulé plusieurs ensembles de Mandelbrot. Étant donné que nous ne pouvons simuler qu'un seul ensemble par polynôme, nous avons sélectionné 3 polynômes différents pour vous montrer les évolutions des ensembles en fonction du degré du polynôme.

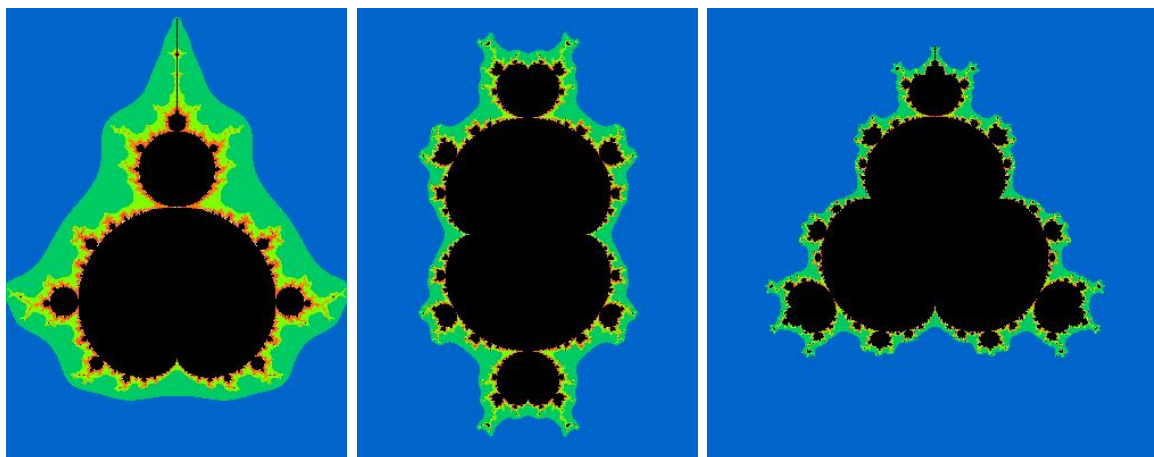


FIGURE 12 – Ensemble de Mandelbrot - 1^{ère} image : $P(z) = z^2 + c$, 2^{ème} image : $P(z) = z^3 + c$, 3^{ème} image : $P(z) = z^4 + c$

Lorsque nous voulons agrandir notre fractale, nous nous rendons compte des particularités spectaculaires de ces dernières. A chaque agrandissement, nous redécouvrons des motifs plus extraordinaires les uns que les autres et vous pouvez vous rendre compte de l'auto-similarité. Dans la figure (13), nous avons fait des agrandissements successifs de notre ensemble de Mandelbrot et nous pouvons ainsi nous rendre compte de l'impossibilité de déterminer le périmètre de notre figure.

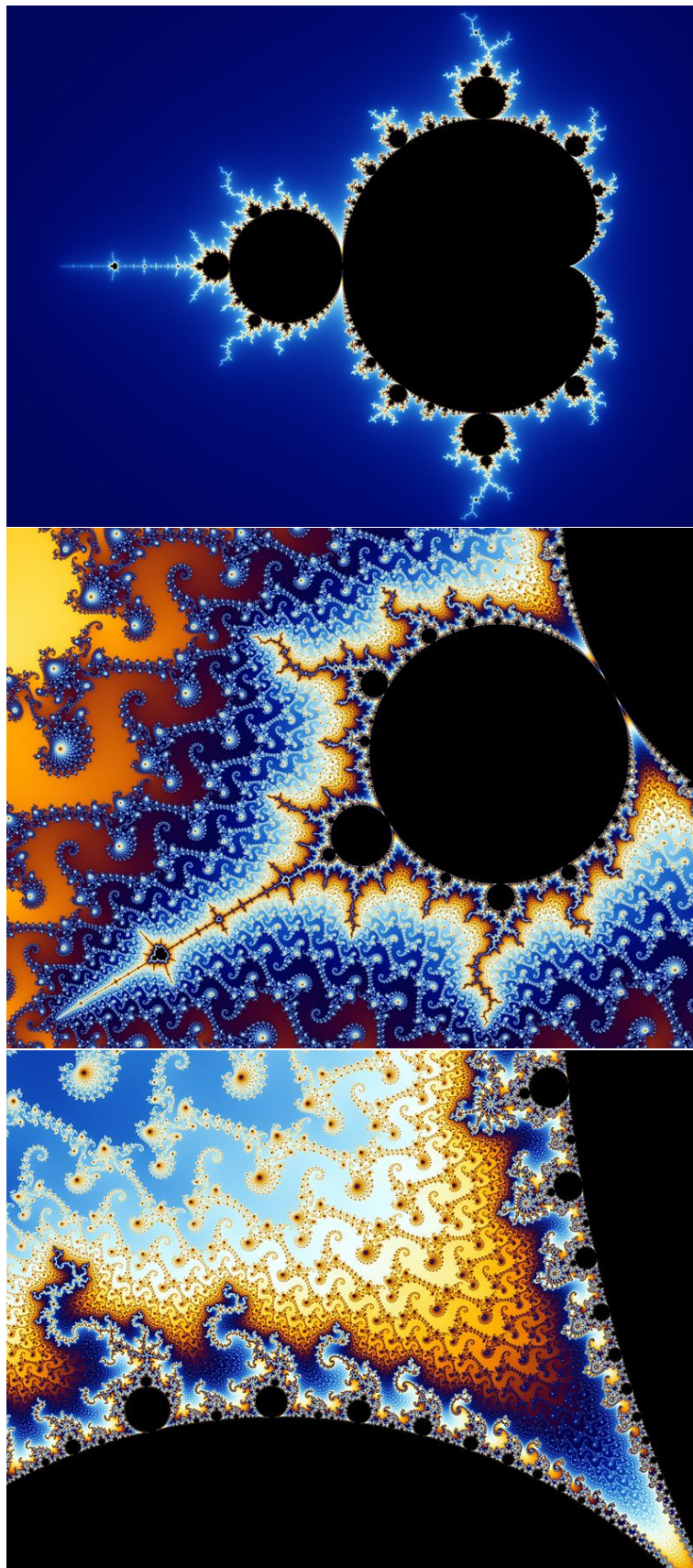


FIGURE 13 – Ensemble de Mandelbrot - agrandissements

Dimension fractale et jeux du Chaos

Le développement des fractales a été accompagné d'une véritable révolution dans la manière de penser notre espace. Le nombre de dimensions de nos objets a complètement changé! Dans son livre "Les objets Fractals", Mandelbrot prend comme exemple la côte de la Grande Bretagne. Cette côte a forcément une dimension D qui se trouve entre $D = 1$, qui se trouve être la dimension de la droite, et $D = 2$, qui se trouve être la dimension d'une surface. Cependant, si on admet que les côtes naturelles ont un aspect chaotique, nous pouvons déterminer un ordre qui leur est sous-jacent. Lorsque l'on regarde une carte au 1/100000, nous pouvons observer plusieurs baies et lorsque nous les comparons à une carte au 1/10000, on se rend compte que ces baies sont elles-même constituées de baies plus petites. C'est exactement comme les images que nous avons créées au point précédent. Cela a donné à Mandelbrot l'idée de créer une nouvelle dimension : la dimension fractale.

Pour étudier la dimension fractale, nous allons ici utiliser les fractales créées lors du jeu du Chaos développé par Michael Barnsley. Ces figures ont comme intérêt d'être très simples ce qui simplifiera notre compréhension de cette étrange dimension.

Commençons par une des fractales les plus simples, le triangle de Sierpinski! Pour construire ce triangle à l'aide du jeu du Chaos, rien de plus simple. Nous commençons par créer un triangle standard ABC (pour notre exemple, nous allons prendre un triangle équilatéral mais cette construction se vérifie pour tout triangle). Puis nous allons prendre un point de départ également au hasard que nous allons appeler p_0 . Nous allons alors prendre un nombre au hasard entre 0 et 1 que nous allons nommer $Rand$. Nous allons alors procéder comme suivant :

- Si $Rand < 0.33$, alors le point suivant (p_1) se trouvera au centre du segment $[p_0, A]$.
- Si $Rand < 0.66$, alors le point suivant (p_1) se trouvera au centre du segment $[p_0, B]$.
- Si $Rand \geq 0.66$, alors le point suivant (p_1) se trouvera au centre du segment $[p_0, C]$.

Puis nous tirons un autre point au hasard et nous recommençons cette étape avec notre point p_1 , et ainsi de suite suivant le nombre de points choisis. Cette construction se retrouve bien sur la figure (14).

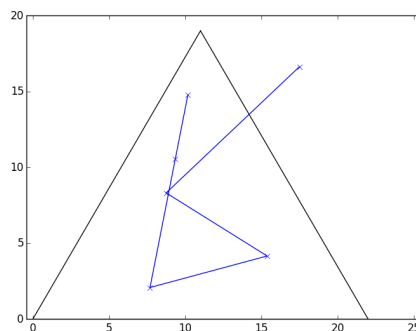


FIGURE 14 – Construction du triangle de Sierpinski

Au fur et à mesure des itérations, nous pouvons voir notre triangle apparaître et nous pouvons bien observer la nature fractale de ce dernier. En effet, pour créer un triangle de Sierpinski, nous divisons notre triangle en 4 puis nous enlevons le triangle central. Puis nous répétons cette opération à l'infini sur les triangles restants. Nous avons ici le même problème que notre côte de grande Bretagne, vu que ce triangle est apparemment plane, nous serions tentés de dire qu'il a 2 dimensions mais dans ce cas, pouvons-nous calculer son aire? Car même si son aire est celle d'un triangle, celle-ci est multipliée par 0.75 à chaque itération...

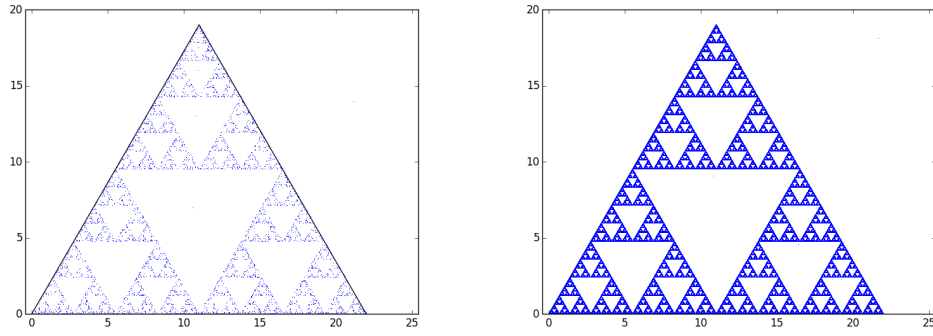


FIGURE 15 – Triangle de Serpinski

Commençons par les bases, pour calculer la dimension fractale d'une figure, nous devons connaître combien de répliques de lui même apparaissent à la génération suivante. Nous pouvons voir que 1 triangle nous donne 3 triangles similaires à la génération suivante. Nous avons donc $N = 3$. Puis nous allons rechercher le facteur de rétrécissement que nous avons sur nos figures. Nous pouvons voir que la base d'un triangle de la génération suivante est 2 fois plus petite que celle de la génération d'avant. Nous allons donc poser $r = 2$. Pour calculer notre dimension fractale, nous allons utiliser l'équation suivante :

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln(r)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = 1.5849 \quad (21)$$

Nous pouvons voir que nous avons ici une dimension égale à 1.6 ce qui est plutôt étrange pour nous, cette dimension particulière est aussi connue sous le nom de granularité de notre fractale.

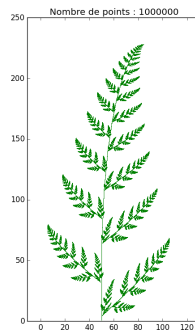


FIGURE 16 – Fougère de Barnsley

Si nous voulons déterminer la dimension fractale de la fougère de Barnsley, nous sommes confrontés à une difficulté supplémentaire. En effet, contrairement au triangle de Serpinski, le facteur de rétrécissement n'est pas constant. Nous allons alors utiliser une approximation. Nous allons prendre une feuille de dimension moyenne (vers le centre de notre fougère) et nous allons postuler que nous pouvons en mettre 16 le long de notre feuille. Cette feuille de dimension moyenne est d'environ 40mm et nous pouvons voir que la longueur totale de notre fougère est d'environ 230mm. Nous pouvons alors déterminer un coefficient de réduction égal à $\frac{230}{40} = 5$. Nous pouvons alors calculer notre dimension fractale :

$$D = \frac{\ln(16)}{\ln(5)} = 1.7227 \quad (22)$$

Ce calcul est très approximatif mais nous donne des résultats assez proches de la réalité car la valeur calculée par les scientifiques est d'environ 1.7.

Conclusion

Depuis la fin du XX^{ème} siècle, l'arrivée de l'ordinateur et les travaux de plusieurs physiciens ont fait pencher la balance. Le plus grand changement a été comment comprendre les phénomènes physiques. Avant ce changement, on pensait que la science répondait à des lois mathématiques, certes complexes, mais qui pouvaient être linéarisées. Un problème aussi complexe soit-il pouvait être simplifié car une petite perturbation ne pouvait pas changer le résultat final, il était donc courant de considérer cette perturbation comme négligeable ! C'est cette croyance qui a été remise en question par la théorie du Chaos.

En terme mathématique, nous sommes passés d'une discipline à une autre. Il n'est pas nécessaire d'être un grand mathématicien pour comprendre ce changement ! Ces deux disciplines sont étudiées au lycée. Nous sommes donc passés d'une analyse linéaire des phénomènes physiques à une analyse par suites. C'est d'ailleurs à cause de cela que l'ordinateur a été un élément décisif dans l'avènement de cette discipline. Si nous prenons comme exemple une loi décrivant l'évolution d'une population, avec une analyse linéaire, nous pouvons vérifier si à $t = 1$, $t = 2...$ notre modèle représente bien l'évolution de cette population et si nous voulons faire des prédictions, alors il nous reste à calculer notre équation à $t = 1000$ ou $t = 10000$! Par contre si nous utilisons des suites mathématiques, nous allons alors avoir à faire près de 1000 à 10000 fois le calcul à la suite ! Nous voyons ici l'avantage d'utiliser un ordinateur pour faire ce travail.

Pour vous représenter le nombre de calculs nécessaires pour faire ce mémoire, je vais vous donner quelques chiffres :

- Pour réaliser les calculs d'un attracteur étrange (voir figure (3)), nous avons eu recours à la méthode de Runge-Kutta qui demande environ 15 opérations à chaque pas. Nous avons utilisé un million de pas (10^6) ce qui nous donne environ 15 millions d'opérations (1.5×10^7) pour la création d'un seul attracteur. Nous avons ici utilisé le langage de programmation Python et cette opération a duré quelques secondes.
- Pour créer les espaces de Mandelbrot ou de Julia (voir figures (10), (11), (12)), nous avons dû créer des images avec une résolution de 300×400 pixel et pour chaque pixels, nous pouvions avoir 1000 opérations. Ce qui nous donne près de 120 millions d'opérations (1.2×10^8) pour la création d'une fractale. Cette opération nous a pris plusieurs minutes.
- Pour terminer, lorsque nous avons voulu faire notre diagramme de bifurcation, nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta (15 opérations) avec 5 millions de pas que nous avons dû traiter pour y retirer les informations les plus intéressantes le tout pour mille (10^3) valeurs du paramètre R . Cela nous donne plus de 400 milliards d'opérations (4×10^{17}). La production de ce graphique nous a demandé plusieurs heures !

Ce ne sont ici que quelques exemples pour nous montrer en quoi l'arrivée de l'ordinateur a été une aide précieuse dans le développement de cette théorie. Et les applications sont très nombreuses ! Cette théorie est maintenant utilisée par les biologistes pour étudier les évolutions de plusieurs populations ayant des interactions entre elles, par les chimistes pour mieux comprendre le caractère oscillatoire de certaines réactions chimiques, en économie pour créer des modèles d'évolution des marchés et dans bien d'autres disciplines que nous n'allons pas citer ici.

Le Chaos repose donc sur des règles souvent simples mais qui représentent des évolutions de système qui ne sont pas intégrables. Cette théorie nous ouvre une nouvelle façon de penser les sciences sans pour autant renier l'apport que nous a légué les générations précédentes. Il y a des moments où nous allons utiliser les fonctions mathématiques pour prédire un plan de vol de fusée par exemple, mais l'informatique embarqué va utiliser la mécanique chaotique pour parer au mieux les fluctuations que n'ont pas pu prédire les scientifiques.

De plus, nous avons pu remarquer que les découvertes faites dans une discipline peuvent généralement être transposées dans une autre discipline comme nous l'avons démontré dans le chapitre sur la convection et les attracteurs étranges de Lorenz. Benoît Mandelbrot disait que "Dans un monde toujours plus complexe, les scientifiques ont besoin de deux outils : des images aussi bien que des nombres, de la vision géométrique aussi bien que de la vision analytique. Lorsqu'il travaillait sur la répartition des revenus, ils fût invité à donner une conférence à Harvard et il vit avec effroi que ses résultats étaient déjà présents sur le tableau de son hôte. Cependant, ce qu'il prit pour une copie de son travail n'était en fait que l'évolution des prix du coton sur les années précédentes. Intrigué par cette ressemblance, il testa son modèle sur plusieurs autres disciplines et remarqua que la méthode utilisée pouvait être étendue à plusieurs secteurs économiques et lui a même permis de réaliser le projet qui l'a rendu célèbre, mesurer la longueur de la côte de la grande Bretagne.

Nous pouvons finir sur les mots de Mr Levis Fry Richardson qui disait : "Big whirls have little whirls, that feed on their velocity ; and little whirls have lesser whirls, and so on to viscosity." (*Les tourbillons contiennent de petits tourbillons, qui y puisent leurs vitesses, et ces petits tourbillons en ont de plus petits, ainsi de suite jusqu'à la viscosité.*). Ce mathématicien anglais nous explique très clairement comment la théorie du chaos et la mécanique classique se rejoignent. La mécanique classique a déterminé pour plusieurs fluides une viscosité spécifique grâce à des expériences réalisées en laboratoire alors que la mécanique du chaos serait capable de déterminer cette viscosité à l'aide de calculateurs et de la connaissance de la répartition et de la géométrie des particules.

Annexe

Développement de l'équation différentielle de la transmission de chaleur par conduction

Nous partons de l'équation (3), nous allons pour commencer par supposer que l'équation de la température est composée de deux fonctions telles que $T(x, y) = f(x).g(y)$. Nous avons donc :

$$g(y) \cdot \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + f(x) \cdot \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} = f''(x).g(y) + f(x).g''(y) = 0 \quad (23)$$

Pour résoudre ce problème, nous allons alors poser :

- $f(x) = e^{-i.\alpha.x}$ nous avons alors : $f''(x) = -\alpha^2.e^{-i.\alpha.x}$
- $g(y) = e^{-i.\beta.y}$ nous avons alors : $g''(y) = -\beta^2.e^{-i.\beta.y}$

En remplaçant les hypothèses, nous pouvons alors réécrire l'équation (23) :

$$-\alpha^2.e^{-i.\alpha.x}.e^{-i.\beta.y} - \beta^2.e^{-i.\alpha.x}.e^{-i.\beta.y} = (\alpha^2 + \beta^2).e^{-i.\alpha.x}.e^{-i.\beta.y} = 0$$

Nous savons que $e^{-i.\alpha.x}.e^{-i.\beta.y}$ est toujours positif $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Nous pouvons alors supposer que $\alpha^2 = -\beta^2 \Rightarrow \alpha = i\beta$. On peut donc maintenant déterminer l'équation de la température en fonction de x et de y . Cela nous donne une équation de la forme :

$$T(x, y) = \Lambda.e^{-i.\alpha.x}.e^{\alpha.y} + \Upsilon = \Lambda.\sin(\alpha x).e^{\alpha.y} + \Upsilon$$

Cette équation n'est cependant pas terminée. Il nous reste à déterminer la valeur des constantes α , Λ et Υ . Pour cela, nous allons étudier ce qui se passe aux limites que nous connaissons.

En supposant que l'axe des x se trouve sur la base de notre plaque où la température est de T_1 et que le sommet de la plaque est à la température T_0 , nous pouvons alors supposer que lorsque $y \rightarrow \infty$, $T(x, \infty) = T_0$. Nous pouvons alors déjà postuler que $\Upsilon = T_0$ et que $\alpha < 0$ pour que $e^{\alpha.y} \rightarrow 0$.

Nous savons également lorsque $y = 0$, $T = T_0$ aux deux extrémités de la plaque. Sachant que la plaque a une largeur l , nous pouvons donc dire que $T = T_0$ lorsque $x = 0$ et $x = l$. Sachant que le sinus est égal à 0 lorsque l'angle est égal à 0, π et tous les $n\pi$ pour tout n entier. Nous pouvons alors poser que $\alpha = -\frac{\pi}{l}$. Enfin, nous savons que la température T est égale à T_1 lorsque $y = 0$ et $x = \frac{l}{2}$. Or, en ce point, $\sin(-\frac{\pi}{l}.x).e^{-\frac{\pi}{l}.y} = 1$. Nous concluons que $\Lambda = T_1 - T_0$. Nous avons alors la formule suivante :

$$T(x, y) = (T_1 - T_0).\sin(-\frac{\pi}{l}.x).e^{-\frac{\pi}{l}.y} + T_0$$

Discrétisation de la transmission de chaleur par conduction

Nous partons ici de l'équation (5) suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \gamma \cdot \Delta T \quad (5)$$

Pour discrétiser, nous allons donc transformer les dérivées partielles grâce à la méthode des différences finies. Nous allons donc poser i l'itération selon x , j l'itération selon y et k l'itération selon t .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \quad (24)$$

En remplaçant (24) dans (5), et en simplifiant, nous arrivons à l'équation suivante :

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k \cdot (1 - 2\mu(\Delta x^2 + \Delta y^2)) + \mu\Delta x^2 (T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k) + \mu\Delta y^2 (T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k) \quad (25)$$

Nous posons : $\mu = \frac{\gamma \Delta t}{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2}$. Une fois que nous avons cela, nous allons mettre nos informations sous la forme suivante :

$$\{T^{k+1}\} = [M] \cdot \{T^k\} + \{T_{ext}^k\} \quad (26)$$

Où :

- $\{T^{k+1}\}$ est le vecteur des températures finales (au temps $t + 1$)
- $[M]$ est la matrice de passage
- $\{T^k\}$ est le vecteur des températures initiales (au temps t)
- $\{T_{ext}^k\}$ est le vecteur des températures extérieures (au temps t)

Pour une résolution de 3×3 , nous avons les informations sous la forme suivante :

$$\{T^{k+1}\} = \begin{Bmatrix} T_{1,1} \\ T_{1,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,1} \\ T_{2,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,1} \\ T_{3,2} \\ T_{3,3} \end{Bmatrix}^{k+1} \quad \{T^k\} = \begin{Bmatrix} T_{1,1} \\ T_{1,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,1} \\ T_{2,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,1} \\ T_{3,2} \\ T_{3,3} \end{Bmatrix}^k \quad \{T_{ext}^k\} = \begin{Bmatrix} \mu\Delta x^2 T_0 + \mu\Delta y^2 T_1 \\ \mu\Delta y^2 T_1 \\ \mu\Delta x^2 T_0 + \mu\Delta y^2 T_1 \\ \mu\Delta x^2 T_0 \\ 0 \\ \mu\Delta x^2 T_0 \\ \mu\Delta x^2 T_0 + \mu\Delta y^2 T_0 \\ \mu\Delta y^2 T_0 \\ \mu\Delta x^2 T_0 + \mu\Delta y^2 T_0 \end{Bmatrix}^k \quad (27)$$

Et enfin, nous créons la matrice de passage :

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 - 2\mu(\Delta x^2 + \Delta y^2) & \mu\Delta x^2 & 0 & \mu\Delta y^2 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mu\Delta x^2 & 1 - 2\mu(\Delta x^2 + \Delta y^2) & \mu\Delta x^2 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \mu\Delta x^2 & 1 - 2\mu(\Delta x^2 + \Delta y^2) & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mu\Delta y^2 & 0 & 0 & 1 - 2\mu(\Delta x^2 + \Delta y^2) & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \mu\Delta y^2 & 0 & \mu\Delta x^2 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (28)$$

Equations de Lorenz

Pour cette étude, nous allons partir des équations de Navier Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = F - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \lambda \Delta T \end{cases} \quad (29)$$

Nous allons considérer l'étude d'une cellule de convection de hauteur h , d'une température minimale au sommet T_0 et d'une température maximale au point le plus bas $T_1 = T_0 + \delta T$. Nous avons alors les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} T(x, y, z = 0, t) = T_0 + \delta T \\ T(x, y, z = h, t) = T_0 \end{cases} \quad (30)$$

Nous allons supposer que notre problème est indépendant selon y . Nous allons également postuler que les coefficients ne varient pas selon la température. Nous pouvons alors modifier l'équation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (31)$$

Nous allons introduire la fonction de courant ψ tel que $\vec{v} = \vec{rot}(\psi)$. Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \\ v_y = \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (32)$$

En tenant compte de (32) dans (29), nous avons alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_x \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_z \end{cases} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \nabla T = \lambda \Delta T \end{cases} \quad (33)$$

Nous allons également ajouter la fonction $\theta(x, z, t)$ qui nous permettra de simplifier les calculs dans la suite. Nous avons alors l'équation de la température suivante :

$$T(x, z, t) = T_0 + \delta T - \frac{\delta T}{h} z + \theta(x, z, t) \quad (34)$$

Dans l'équation de la quantité de mouvement, nous avons F qui représente les forces massiques s'exerçant dans le fluide. Dans notre cas, ces forces sont représentées par la force de gravitation. Nous pouvons donc transformer F en vecteur :

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho(T) \cdot g \end{pmatrix} \quad (35)$$

Equations de Lorenz

Pour éliminer la pression de notre équation du mouvement, nous allons faire la transformation suivante : $\frac{\partial}{\partial z}$ (équation du mouvement selon x) - $\frac{\partial}{\partial x}$ (équation du mouvement selon z).

Cela va nous donner l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 z} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v_z}{\partial^2 x} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \\ = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \nabla^2 v_x}{\partial z} - \frac{\partial \nabla^2 v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho(T)}{\rho} \right) g \end{aligned} \quad (36)$$

Maintenant, en prenant en compte l'équation (34), (35) et (36), nous pouvons réécrire l'équation (33) comme suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho(T)}{\rho} \right) g \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} + K \nabla^2 \theta \end{cases} \quad (37)$$

Nous allons considérer le $\rho(T)$ variable. En effet, le phénomène de convection est généré par les changement de densité de notre fluide qui se fait suivant la température de ce dernier. Nous allons ici utiliser l'approximation de Boussinesq-Oberheck. Cette approximation nous donne la formule suivante :

$$\alpha \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T} \right)_{P=\text{constante}} \quad (38)$$

Pour un ΔT faible, nous pouvons alors avoir la fonction suivante :

$$\rho(T) = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0)) \quad (39)$$

En intégrant (39) dans (37) en prenant en compte (34), nous retrouvons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g \cdot \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} + K \nabla^2 \theta \end{cases} \quad (40)$$

Lorsque nous observons notre phénomène, nous pouvons commencer à faire quelques hypothèses sur certains points de notre problème.

- Lorsque $z = 0$ et $z = h$, nous pouvons observer que θ est nul. Nous pouvons alors poser : $\theta(x, 0, t) = \theta(x, h, t) = 0$
- Nous savons également que notre courant est nul au sommet et à la base de notre cellule de convection. Nous pouvons alors poser : $\psi(x, 0, t) = \psi(x, h, t) = 0$
- Enfin, nous allons également poser : $\nabla^2 \psi(x, 0, t) = \nabla^2 \psi(x, h, t) = 0$

Avec cela, nous allons pouvoir déterminer notre système de Lorenz. Pour cela, nous allons développer nos fonctions $\theta^*(x^*, z^*, t^*)$ et $\psi^*(x^*, z^*, t^*)$ en séries de Fourier. Pour cela, nous allons poser :

$$x = h \cdot x^* \quad z = h \cdot z^* \quad t = \frac{h^2}{K} t^* \quad (41)$$

Equations de Lorenz

Les séries de Fourier sont un outil très utilisé dans l'étude des fonctions périodiques. Notre cellule de convection répond donc à ce critère. Nous allons donc développer les fonctions ψ^* et θ^* avec une longueur d'onde égale à l dans la direction de x et $2h$ dans la direction de z . Nous avons donc les développements suivant :

$$\begin{aligned}\psi^*(x^*, z^*, t^*) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{mn}(m, n, t^*) \cdot e^{2\pi i \left(\frac{mh}{l} x^* + \frac{n}{2} z^* \right)} \\ \theta^*(x^*, z^*, t^*) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_{mn}(m, n, t^*) \cdot e^{2\pi i \left(\frac{mh}{l} x^* + \frac{n}{2} z^* \right)}\end{aligned}\quad (42)$$

Pour le développement des séries, Lorenz a choisi seulement 3 amplitudes : $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$. Il a donc retrouvé les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\psi(x, z, t) &= \frac{K(1+a^2)\sqrt{2}}{a} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \\ \theta(x, z, t) &= \frac{\delta T \cdot Ra_c}{\pi \cdot Ra} \left[\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right]\end{aligned}\quad (43)$$

Où Ra est le nombre de Rayleigh et Ra_c est le nombre de Rayleigh critique. On a donc :

$$Ra = \frac{\alpha g h^3 \delta T}{K \nu} \quad Ra_c = \frac{\pi^2 (1+a^2)^3}{a^2} \quad (44)$$

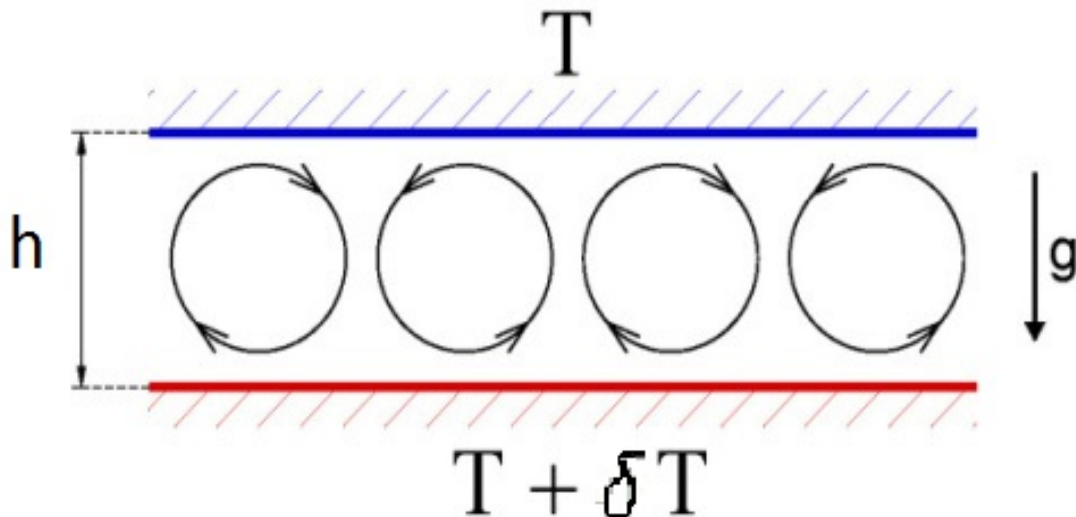
En injectant les équations (43) dans les équations (40), nous obtenons le système de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = Pr(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (45)$$

Où :

$$R = \frac{Ra}{Ra_c} \quad \beta = \frac{4}{(1+a^2)} \quad (46)$$

Dans cette équation, les variables X , Y et Z représentent l'évolution de la dérivée de la vitesse du fluide selon le profil de température dans notre cellule de convection.



Méthode de Runge-Kutta

Pour utiliser le système d'équation de Lorenz dans notre programme, nous avons recours aux dérivations de Runge Kutta d'ordre 4. Les formules sont faciles à programmer et les résultats sont généralement très proches de la fonction réelle. Cette méthode tire les avantages des méthodes de Taylor en gardant une grande simplicité d'exécution.

La formule de Runge-Kutta à l'ordre 4 est la suivante pour une équation de la forme $y(t)$:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \times f(t_n, y(t_n)) \\ k_2 &= h \times f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y(t_n) + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= h \times f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y(t_n) + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= h \times f(t_n + h, y(t_n) + k_3) \end{aligned} \quad (47)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2.k_2 + 2.k_3 + k_4) + O(h^4)$$

Où $O(h^4)$ est l'erreur produite, nous devons réfléchir au choix du pas de temps h nous permettant d'avoir un bon compromis entre la précision du résultat et le temps de calcul de l'ordinateur.

Dans notre cas, nous avons le système de Lorenz suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Pr(y - x) &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= r.x - y - x.z &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= x.y - b.z &= k(x, y, z) \end{aligned} \quad (48)$$

Nous allons donc avoir une approximation de notre système avec les suites suivantes :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + (a_x + 2.b_x + 2.c_x + d_x) \\ Y_{n+1} &= Y_n + (a_y + 2.b_y + 2.c_y + d_y) \\ Z_{n+1} &= Z_n + (a_z + 2.b_z + 2.c_z + d_z) \end{aligned} \quad (49)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_x &= h.f(X_n, Y_n) \\ a_y &= h.g(X_n, Y_n, Z_n) \\ a_z &= h.k(X_n, Y_n, Z_n) \\ b_x &= h.f\left(X_n + \frac{a_x}{2}, Y_n + \frac{a_y}{2}\right) \\ b_y &= h.g\left(X_n + \frac{a_x}{2}, Y_n + \frac{a_y}{2}, Z_n + \frac{a_z}{2}\right) \\ b_z &= h.k\left(X_n + \frac{a_x}{2}, Y_n + \frac{a_y}{2}, Z_n + \frac{a_z}{2}\right) \\ c_x &= h.f\left(X_n + \frac{b_x}{2}, Y_n + \frac{b_y}{2}\right) \\ c_y &= h.g\left(X_n + \frac{b_x}{2}, Y_n + \frac{b_y}{2}, Z_n + \frac{b_z}{2}\right) \\ c_z &= h.k\left(X_n + \frac{b_x}{2}, Y_n + \frac{b_y}{2}, Z_n + \frac{b_z}{2}\right) \\ d_x &= h.f(X_n + c_x, Y_n + c_y) \\ d_y &= h.g(X_n + c_x, Y_n + c_y, Z_n + c_z) \\ d_z &= h.k(X_n + c_x, Y_n + c_y, Z_n + c_z) \end{aligned} \quad (50)$$

Nous pouvons ici nous rendre compte du nombre d'opérations nécessaires à la modélisation de notre attracteur. La modélisation de notre phénomène est donc confiée à un ordinateur.

Bibliographie

Littérature

- La théorie du Chaos - *James Gleick*
- Chaos and integrability in nonlinear dynamics - *Michael Tabor*
- Texts on Computation Mechanics VII An Exploration of Chaos - *John Argyris, Gunter Faust, Maria Haase*
- Convection and Chaos in Fluids - *J.K. Bhattacharjee*
- Fractals Everywhere - *Michael F. Barnsley*
- Fractal Geometry - *Kenneth Falconer*
- The Beauty of Fractals - *H.O. Peitgen, P.H. Richter*

Internet

- Quelques éléments sur la théorie du Chaos :
[http ://www.aestq.org/sautquantique/telechargement/chaos.pdf](http://www.aestq.org/sautquantique/telechargement/chaos.pdf)
- La théorie du Chaos :
[http ://just.loic.free.fr/index.php?page=accueil](http://just.loic.free.fr/index.php?page=accueil)
- Convection turbulente dans une cellule de Rayleigh-Bénard :
[https ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00366089/document](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00366089/document)
- Rayleigh-Bénard convection, thirty years of experimental, theoretical, and modeling work :
[http ://www.off-ladhyx.polytechnique.fr/people/pops/benard.pdf](http://www.off-ladhyx.polytechnique.fr/people/pops/benard.pdf)
- Modélisation du problème à trois corps restreint :
[https ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/faure/enseignement/projets_simulation/rapport_3_corps_restreint.pdf](https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/faure/enseignement/projets_simulation/rapport_3_corps_restreint.pdf)
- Introduction à la logique Shadok :
[http ://www.lesshadoks.com](http://www.lesshadoks.com)
- La Terre dans le chaos :
[http ://www.udppc.asso.fr/bupdoc/consultation/article-bup.php?ID_fiche=11448](http://www.udppc.asso.fr/bupdoc/consultation/article-bup.php?ID_fiche=11448)

Youtube

- MAE5790-18 Strange attractor for the Lorenz equations - Cornell MAE