

La théorie du Chaos : Lorenz et ses attracteurs

Edward Norton Lorenz

Edward Norton Lorenz était mathématicien au M.I.T. et avait une passion : la météo. Durant ses travaux, sur les mouvements des masses d'air pour essayer de prévoir l'évolution de la météo, Lorenz utilisa l'un des premiers ordinateurs mis à la disposition des chercheurs du M.I.T. : le Royal McBee LGP-300. Bien qu'ayant une puissance très limitée, cet ordinateur a servi à démontrer l'une des plus grandes révolutions que les sciences aient connues : La théorie du Chaos. Les résultats de ces recherches ont été présentés par Lorenz lors d'une conférence à l'association américaine pour l'avancement des sciences ayant pour titre : "Est-ce que les battements d'ailes d'un papillon au Brésil peut créer une tornade au Texas?"

Un peu de météorologie

Pour développer sa théorie, Lorenz s'intéressa à la météo, c'est à dire au déplacement des masses d'air dans l'atmosphère. Il préféra partir d'un modèle simple et étudier son évolution. Ce modèle est celui que l'on retrouve dans une cellule de convection. L'air se chauffe au contact du sol, puis s'élève dans l'atmosphère où il se refroidit et finit par migrer de nouveau vers le sol comme nous pouvons le voir dans la figure (1).

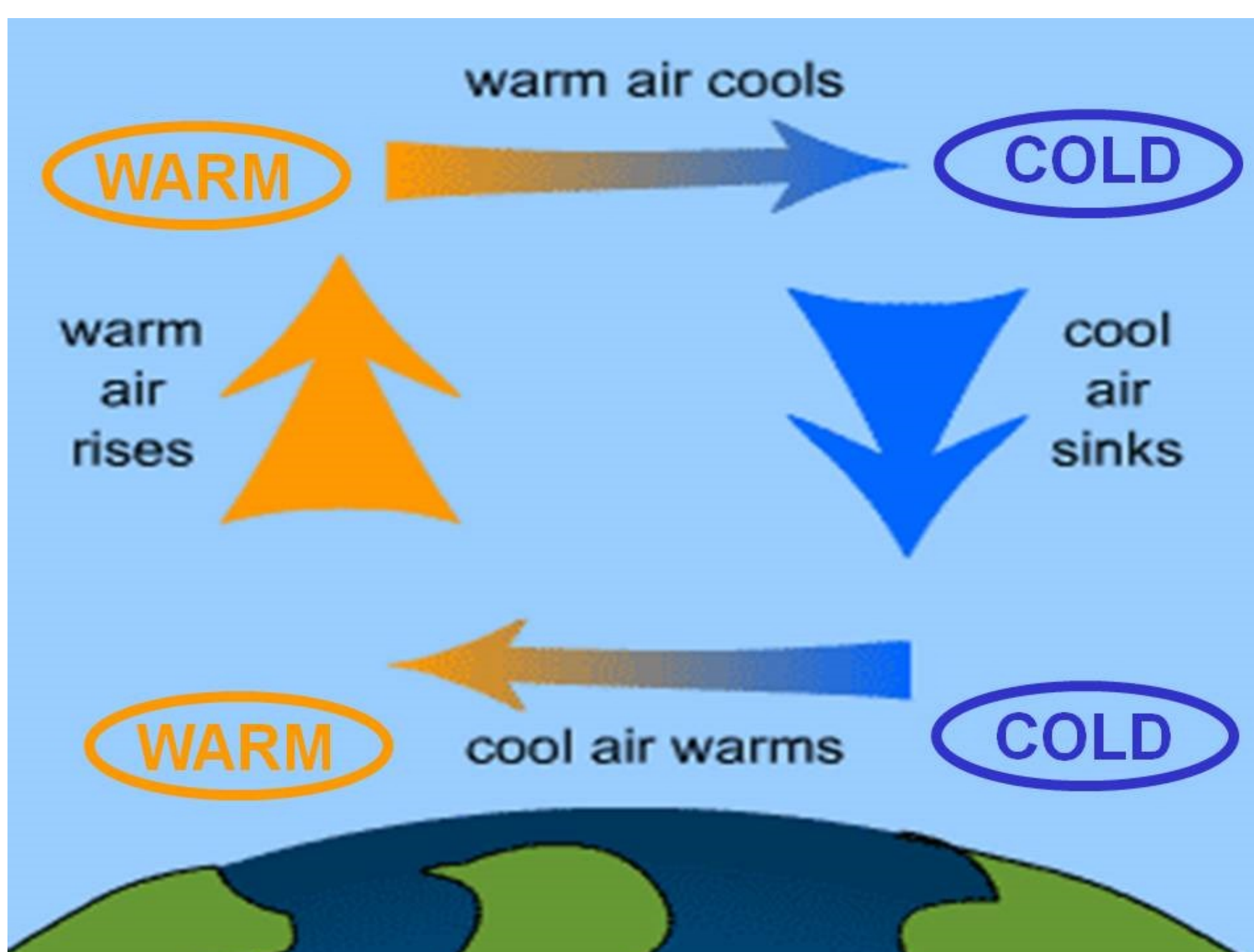


FIGURE – Cellule de convection atmosphérique

Pour cela, Lorenz va partir du système d'équations de Navier-Stokes (1) pour développer son système d'équation (2) connu aujourd'hui sous le nom de système de Lorenz.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = F - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \lambda \Delta T \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Pr(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (2)$$

Le but de Lorenz était de comprendre le mécanisme derrière le déplacement des masses plutôt que de prévoir précisément le temps. Malgré cette limite, ce scientifique va ouvrir la voie à une méthode révolutionnaire.

Contact

COURTOIS Thomas

- Email : courtois.thomas.ensiате@gmail.com
- Phone : 06.73.26.73.90

Sensibilité aux conditions initiales

Avant la théorie du Chaos, les scientifiques pensaient qu'une faible perturbation ne pouvait engendrer que de faibles conséquences. L'arrivée de la théorie du Chaos a complètement changé cette perception de la physique. Il est désormais admis qu'une faible perturbation peut avoir une conséquence significative sur le résultat final. Sur la figure (2), nous pouvons voir que si nous modifions très légèrement une donnée de départ, le résultat final peut être très différent.

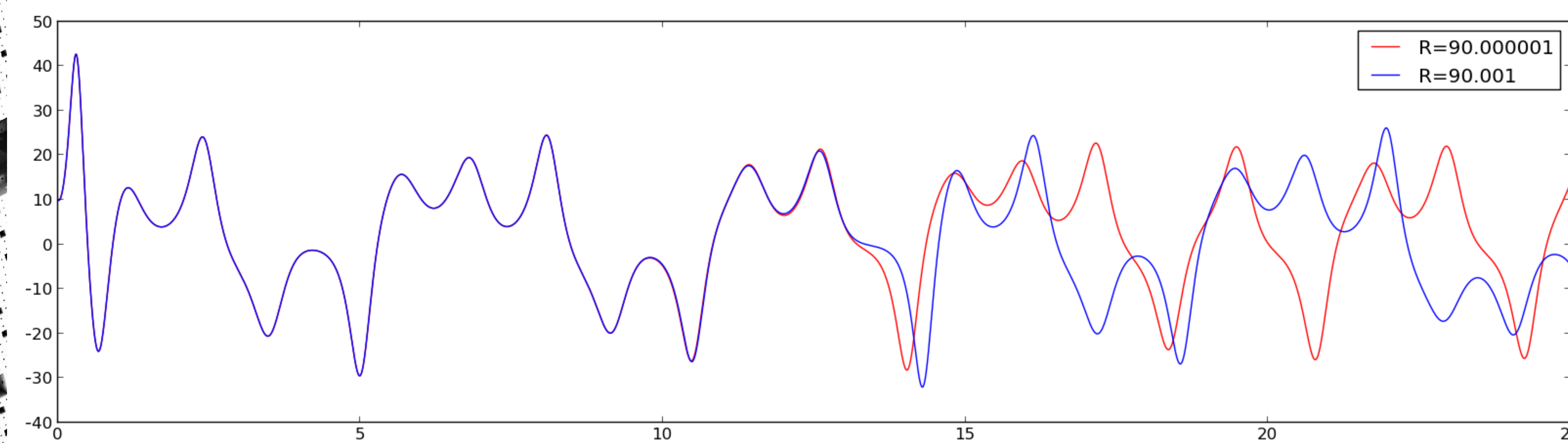


FIGURE – Évolution des coordonnées de x en fonction du temps

Étude du système dynamique

Grâce à un programme informatique écrit en Python, nous pouvons simuler le comportement du système de Lorenz et vous présenter les attracteurs étranges. Ici, nous avons pris le point de départ de coordonnées fixées avec un pas de temps de 0.001s. On va également considérer les paramètres Pr et β stables et faire varier le paramètre R . Nous observons la formation d'un attracteur de Lorenz.

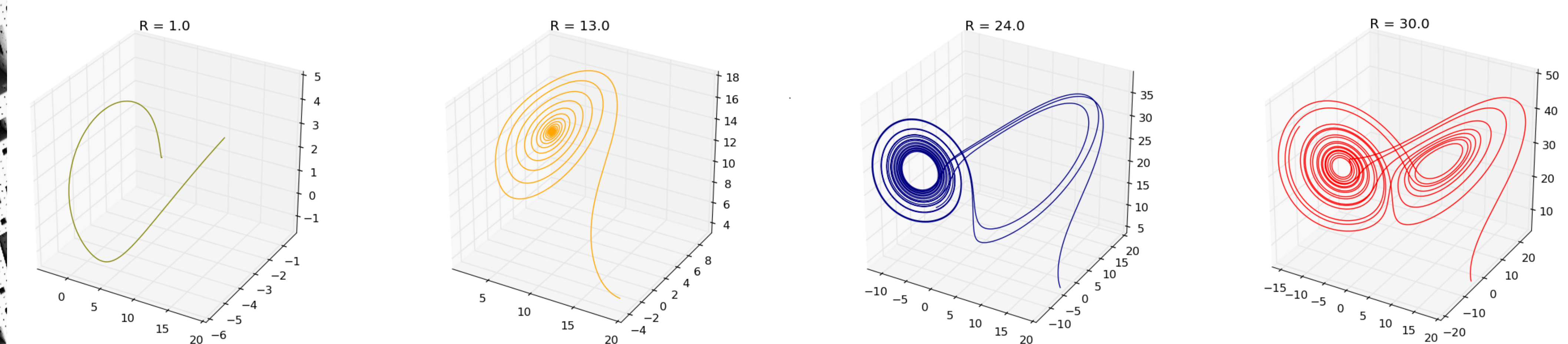


FIGURE – Modélisation du système de Lorenz

Nous pouvons observer que lorsque nous avons un R faible, notre système tend vers un seul point et reste stable. Lorsque R augmente, le temps qui est mis pour se stabiliser augmente jusqu'à ce qu'il y ait apparition d'un deuxième attracteur. A partir de ce moment là, il est très peu probable que notre système se stabilise à un seul point. Nous pouvons ici remarquer la ressemblance entre l'attracteur et le papillon cité lors de la conférence de Lorenz.

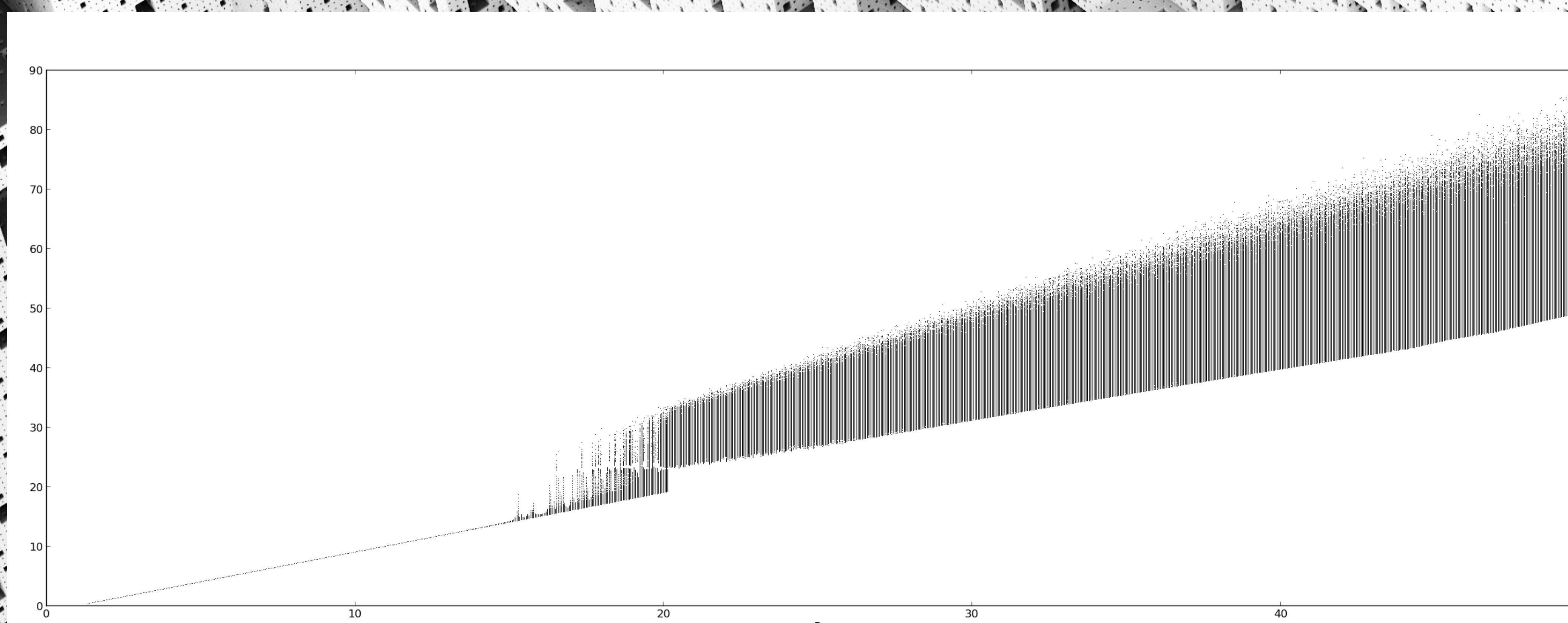


FIGURE – Diagramme de bifurcation

Lorenz map

Pour créer cette figure, nous devons nous intéresser aux variations de z en fonction du temps. Cette variation ressemble à une courbe sinusoïdale dont l'amplitude est variable. Lorsque nous comparons les sommets entre eux, nous obtenons alors la figure suivante pour une valeur de $R = 10$ et $R = 25$.

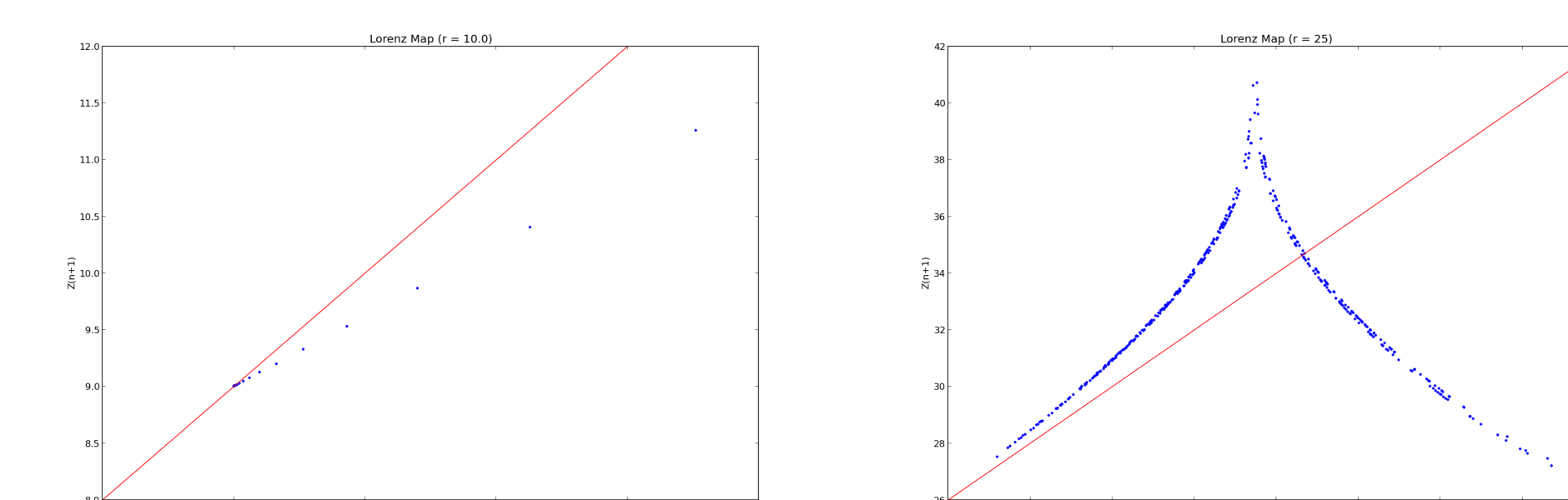


FIGURE – Lorenz map

Lorenz web et bifurcations

Pour créer notre toile, nous allons utiliser la figure précédente. La création de la toile sur cette figure nous donne la construction suivante :

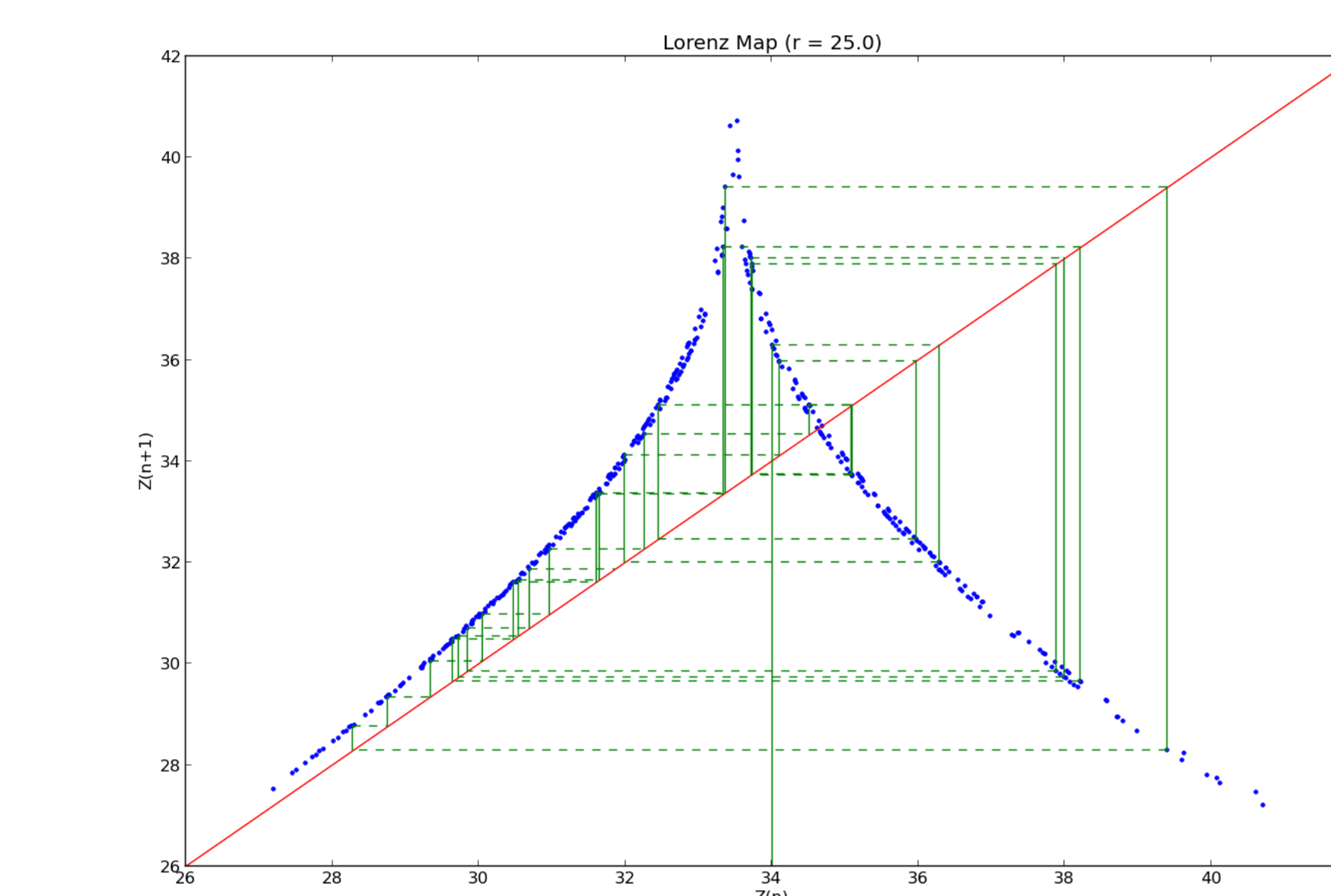


FIGURE – Lorenz Web

Une fois cette construction faite, nous pouvons représenter notre diagramme de bifurcation (figure (4)). Cette figure nous renseigne de façon très précise les zones "stables" et les zones chaotiques.

Conclusion

Les attracteurs étranges ont ouvert un nouveau domaine d'étude des systèmes dynamiques. Grâce aux découvertes de Lorenz et l'augmentation des capacités de calcul des ordinateurs, des attracteurs ont été développés pour prévoir l'évolution de réactions chimiques ou de modèles économiques.

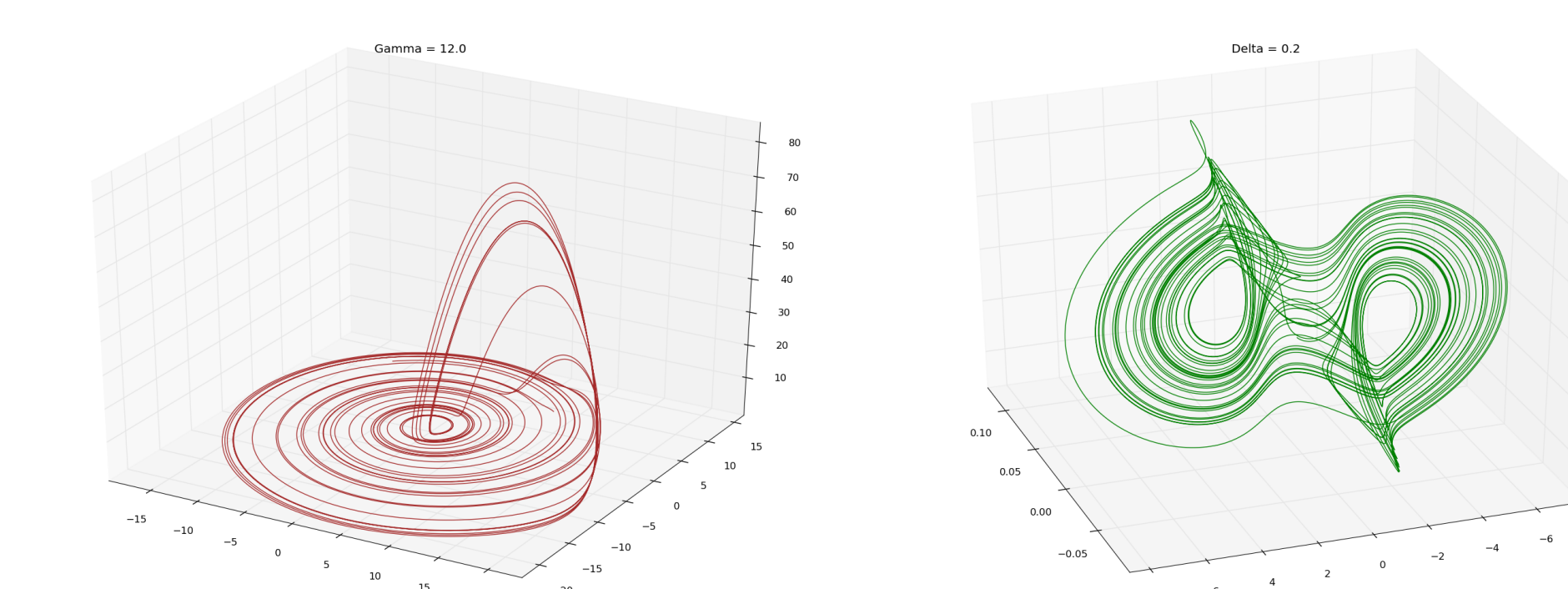


FIGURE – Attracteur de Rössler (chimie) et oscillateur de Van Der Pol (économie)